

Wzory, których **nie ma** w karcie CKE

POZIOM PODSTAWOWY + ROZSZERZONY

TEORIA • WZORY • PRZYKŁADY

AUTOR

Kacper Parylak

■ korepetycjesolve.com

WYDANIE

Solve / 2026

LEKCJA PRÓBNA GRATIS

■ SOLVE

Zbiór wzorów, twierdzeń i własności, których **nie znajdziesz** w „Wybranych wzorach matematycznych” CKE (Formuła 2023), a które regularnie pojawiają się na maturze z matematyki.

Legenda: wzory bez oznaczenia obowiązują na poziomie **podstawowym** (i rozszerzonym), wzory oznaczone **[R]** dotyczą wyłącznie poziomu **rozszerzonego**.

Spis treści

1	Liczby rzeczywiste i procenty	1
1.1	Cechy podzielności	1
1.2	Zapis symboliczny liczb (dowodzenie)	1
1.3	NWD i NWW	2
1.4	Pierwiastki	2
1.5	Logarytmy	3
1.6	Procenty	4
1.7	Wartość bezwzględna	4
1.8	Jednostki - najczęstsze przeliczenia	5
1.9	Średnia prędkość	6
2	Wyrażenia algebraiczne i dowodzenie	7
2.1	Dodatkowe wzory skróconego mnożenia	7
2.2	Techniki dowodzenia nierówności	8
2.3	Nierówności między średnimi [R]	8
3	Funkcje	9
3.1	Pojęcia, których nie definiują tablice	9
3.2	Wyznaczanie dziedziny - konieczne założenia	9
3.3	Charakterystyczne punkty wykresu	9
3.4	Przekształcenia wykresu funkcji	10
4	Funkcja liniowa i funkcja kwadratowa	11
4.1	Funkcja liniowa	11
4.2	Funkcja kwadratowa	11
4.3	Najmniejsza i największa wartość na przedziale	12
5	Wielomiany i funkcje wymierne	14
5.1	Pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych [R]	14
5.2	Dzielenie wielomianów [R]	14
5.3	Funkcja homograficzna [R]	15
6	Funkcja wykładnicza i logarytmiczna	16
6.1	Monotoniczność - klucz do równań i nierówności	16
6.2	Założenia przy logarytmach	17
6.3	Charakterystyczne punkty i asymptoty wykresów	17
7	Ciągi	18
7.1	Zależności między dowolnymi wyrazami	18
7.2	Własność środkowego wyrazu	18
7.3	Monotoniczność ciągu	19
7.4	Granice [R]	19

8	Trygonometria	21
8.1	Znaki funkcji trygonometrycznych w ćwiartkach	21
8.2	Kąty ostre w trójkącie prostokątnym	21
8.3	Tangens sumy i różnicy [R]	22
8.4	Funkcje podwojonego kąta przez tangens [R]	22
8.5	Funkcje potrojonego kąta [R]	22
8.6	Suma i różnica sinusa i cosinusa tego samego kąta [R]	22
8.7	Zamiana stopni na radiany [R]	22
9	Planimetria	24
9.1	Wielokąty	24
9.2	Trójkąt - warunek istnienia i rodzaj	24
9.3	Kąty przy przecinających się prostych	25
9.4	Kwadrat	25
9.5	Sześciokąt foremny	26
9.6	Trójkąty charakterystyczne	26
9.7	Trójkąt równoboczny	26
9.8	Trójkąt prostokątny	26
9.9	Okrąg i styczne	27
9.10	Trapez	27
9.11	Podobieństwo figur	27
9.12	Czworokąty w okręgu [R]	28
9.13	Twierdzenia rachunkowe [R]	28
9.14	Liczba π	29
10	Geometria analityczna	30
10.1	Współczynnik kierunkowy	30
10.2	Symetrie punktu w układzie współrzędnych	30
10.3	Punkty szczególne trójkąta [R]	31
10.4	Pole trójkąta o danych wierzchołkach [R]	31
10.5	Odległości	32
10.6	Okrąg a prosta [R]	32
11	Stereometria	33
11.1	Sześcian i prostopadłościan	33
11.2	Liczba ścian, krawędzi i wierzchołków	33
11.3	Czworościan foremny	34
11.4	Kąty w bryłach - jak je znaleźć	34
11.5	Podobieństwo brył	34
12	Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i statystyka	35
12.1	Reguły zliczania	35
12.2	Który wzór wybrać? Tabela decyzyjna	35
12.3	Prawdopodobieństwo - własności praktyczne	36

12.4	Statystyka	37
13	Granice i pochodna	38
13.1	Granice funkcji [R]	38
13.2	Pochodna [R]	38
13.3	Interpretacje pochodnej [R]	39

Solve

Liczby rzeczywiste i procenty

TEORIA I WZORY

W tym dziale zbieramy narzędzia do pracy z liczbami: jak sprawdzić podzielność bez dzielenia, jak zapisać „dowolną liczbę parzystą” literką (kluczowe w zadaniach na dowodzenie), jak nie pogubić się w procentach oraz co wolno, a czego nie wolno robić z pierwiastkami i logarytmami.

1.1 CECHY PODZIELNOŚCI

- Cecha podzielności to szybki test: patrzysz na cyfry liczby i od razu wiesz, czy dzieli się bez reszty - bez wykonywania dzielenia.

Liczba całkowita jest podzielna:

- przez 2 - gdy jej ostatnia cyfra to 0, 2, 4, 6 lub 8,
- przez 3 - gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3,
- przez 4 - gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4,
- przez 5 - gdy jej ostatnia cyfra to 0 lub 5,
- przez 6 - gdy jest podzielna jednocześnie przez 2 i przez 3,
- przez 9 - gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9,
- przez 10 - gdy jej ostatnia cyfra to 0.

PRZYKŁAD

Czy 2514 dzieli się przez 6? Ostatnia cyfra 4 - jest parzysta, więc dzieli się przez 2. Suma cyfr: $2 + 5 + 1 + 4 = 12$, a 12 dzieli się przez 3. Skoro działa i 2, i 3 - liczba dzieli się przez 6.

1.2 ZAPIS SYMBOLICZNY LICZB (DOWODZENIE)

- W zadaniu „udowodnij, że dla każdej liczby parzystej...” nie możesz sprawdzać liczb po kolei - musisz zapisać *wszystkie naraz*. Do tego służy zapis z literką: $2k$ to „dowolna liczba parzysta”, bo cokolwiek podstawisz za k , wynik będzie parzysty.

Dla $k \in \mathbb{Z}$:

Liczba parzysta / nieparzysta

$$2k \quad \text{oraz} \quad 2k + 1$$

Liczba podzielna przez n / dająca resztę r przy dzieleniu przez n

$$nk \quad \text{oraz} \quad nk + r$$

Kolejne liczby całkowite, parzyste, nieparzyste

$$k, k + 1, k + 2 \qquad 2k, 2k + 2 \qquad 2k + 1, 2k + 3$$

PRZYKŁAD

„Liczba, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3” to $7k + 3$. Sprawdzenie: dla $k = 2$ mamy 17, i faktycznie $17 = 2 \cdot 7 + 3$.

1.3 NWD I NWW

- NWD to największa liczba, przez którą dzielą się obie liczby; NWW to najmniejsza liczba, która dzieli się przez obie. Poniższy związek pozwala policzyć jedno, gdy znasz drugie.

$$\text{NWD}(a, b) \cdot \text{NWW}(a, b) = a \cdot b$$

PRZYKŁAD

$\text{NWD}(12, 18) = 6$. Zatem $\text{NWW}(12, 18) = \frac{12 \cdot 18}{6} = 36$ - bez wypisywania wielokrotności.

1.4 PIERWIASTKI

- Pierwiastki wolno mnożyć i dzielić (gdy mają ten sam stopień), ale *nie wolno* ich dodawać ani odejmować „pod jednym daszkiem”. To najczęstszy błąd rachunkowy na maturze.

Mnożenie i dzielenie pierwiastków tego samego stopnia

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Wskazówka. Uwaga: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$. Sprawdź na liczbach: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, ale $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Pierwiastek z pierwiastka [R]

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

- Stopnie pierwiastków się mnożą: pierwiastek kwadratowy z pierwiastka sześciennego to pierwiastek stopnia 6.

Pierwiastek z kwadratu

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{ale} \quad (\sqrt{x})^2 = x \quad (x \geq 0)$$

- Kolejność ma znaczenie! Gdy *najpierw* podnosisz do kwadratu, a *potem* pierwiastkujesz, znak liczby ginie w kwadracie - dlatego wynik musi być nieujemny, stąd wartość bezwzględna.

PRZYKŁAD

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$ - a nie -5 . Ten wzór ratuje przy upraszczaniu: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$.

Usuwanie niewymierności z mianownika

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \qquad \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

- „Niewymierność w mianowniku” = pierwiastek pod kreską ułamka. Pozbywasz się go, rozszerzając ułamek: albo przez ten sam pierwiastek, albo - gdy w mianowniku jest suma - przez wyrażenie z przeciwnym znakiem (wtedy działa wzór $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ i pierwiastki znikają).

PRZYKŁAD

$$\frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = \sqrt{3} - 1.$$

1.5 LOGARYTMY

- Logarytm to pytanie: „do jakiej potęgi podnieść podstawę, żeby dostać tę liczbę?”. Stąd dwie wartości, które musisz znać z pamięci - tablice ich nie podają.

Wartości szczególne

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

- $\log_a 1 = 0$, bo $a^0 = 1$ dla każdej podstawy. $\log_a a = 1$, bo $a^1 = a$.

Odwrócenie podstawy i liczby logarytmowanej [R]

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

PRZYKŁAD

$\log_8 2 = \frac{1}{\log_2 8} = \frac{1}{3}$ - zamiast myśleć „osiem do jakiej potęgi daje dwa”, odwracasz pytanie na łatwiejsze.

1.6 PROCENTY

Jakim procentem liczby a jest liczba b ?

$$\frac{b}{a} \cdot 100\%$$

- Dzielisz „to, o co pytają” przez „punkt odniesienia”. Punkt odniesienia (czyli 100%) to zawsze liczba po słowie „liczby” w pytaniu.

Łańcuch zmian procentowych

- Podwyżka o $p\%$ = mnożenie przez $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, obniżka o $p\%$ = mnożenie przez $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Kilka zmian po kolei? Po prostu mnożysz kolejne nawiasy - nie wolno dodawać ani odejmować procentów!

PRZYKŁAD

Cena wzrosła o 10%, potem spadła o 20%: $x \cdot 1,1 \cdot 0,8 = 0,88x$. Łącznie cena *spadła* o 12% (a nie o 10%!).

Wskazówka. „O ile procent więcej” i „o ile procent mniej” to różne wartości: 75 jest o 50% większe od 50, ale 50 jest tylko o $33\frac{1}{3}\%$ mniejsze od 75 - bo zmienia się punkt odniesienia.

Kapitalizacja odsetek k razy w roku

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot k}\right)^{n \cdot k}$$

- Karta CKE podaje tylko wersję z jedną kapitalizacją rocznie. Gdy bank dopisuje odsetki np. co kwartał ($k = 4$): oprocentowanie dzielisz na k części, ale za to potęgujesz k razy częściej. K - kapitał początkowy, p - oprocentowanie roczne w %, n - liczba lat.

PRZYKŁAD

1000 zł na 2 lata, 10% rocznie, kapitalizacja co pół roku ($k = 2$): $K_2 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{10}{200}\right)^4 = 1000 \cdot 1,05^4 \approx 1215,51$ zł.

Wariant z podatkiem od odsetek (podatek Belki 19%)

$$K_n = K \cdot \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100 \cdot k}\right)^{n \cdot k}$$

- W zadaniach „z życia” bank oddaje tylko część odsetek - resztę zabiera podatek. Mnożnik 0,81 to 100% minus 19% podatku (w treści zadania stawka może być inna - wtedy podmień mnożnik).

1.7 WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

- $|x - a|$ czytaj: „odległość liczby x od liczby a na osi liczbowej”. Wtedy równania i nierówności rozwiązujesz „na oko”: $|x - 3| < 2$ znaczy „ x leży bliżej niż 2 od trójki”.

Interpretacja odległościowa (dla $r > 0$)

$$|x - a| = r \iff x = a - r \vee x = a + r$$

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$$

$$|x - a| > r \iff x < a - r \vee x > a + r$$

PRZYKŁAD

$|x - 3| < 2$: szukamy liczb odległych od 3 o mniej niż 2, czyli $x \in (1, 5)$.

Przemienność pod kwadratem i wartością bezwzględną

$$(a - b)^2 = (b - a)^2 \qquad |a - b| = |b - a|$$

- Odejmowanie nie jest przemienne, ale kwadrat i wartość bezwzględna „zjadają” minus - więc kolejność przestaje mieć znaczenie. Przydaje się przy skracaniu ułamków typu $\frac{(x-2)^2}{(2-x)^2} = 1$.

Równość wartości bezwzględnych

$$|a| = |b| \iff a = b \vee a = -b$$

- Dwie liczby mają równe wartości bezwzględne, gdy są równe albo przeciwne. Tak rozbijasz równania typu $|2x - 1| = |x + 3|$ na dwa zwykłe równania.

Nierówność trójkąta [R]

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

1.8 JEDNOSTKI - NAJCZĘSTSZE PRZELICZENIA

- Zadania praktyczne (działki, zbiorniki, prędkości) wymagają sprawnego żonglowania jednostkami. Pułapka: jednostki *pola* przelicza się z kwadratem, a *objętości* - z sześcianem przelicznika długości.

Wielkość	Przeliczenia
długość	1 km = 1000 m, 1 m = 100 cm
pole	1 m ² = 10 000 cm ² , 1 ha = 10 000 m ² , 1 a = 100 m ²
objętość	1 l = 1 dm ³ = 1000 cm ³ , 1 m ³ = 1000 l
masa	1 t = 1000 kg, 1 kg = 100 dag = 1000 g

PRZYKŁAD

Akwarium 40 cm × 25 cm × 30 cm: $V = 30\,000\text{ cm}^3 = 30\text{ dm}^3 = 30$ litrów.

1.9 ŚREDNIA PRĘDKOŚĆ

- Pułapka klasyczna: średniej prędkości *nie* liczy się jako średniej arytmetycznej prędkości. Zawsze: cała droga podzielona przez cały czas.

$$v_{\text{sr}} = \frac{s_{\text{całkowita}}}{t_{\text{całkowity}}}$$

PRZYKŁAD

Trasa 120 km w jedną stronę: tam 60 km/h (czyli 2 h), z powrotem 40 km/h (czyli 3 h). Średnia: $\frac{240}{5} = 48$ km/h - a nie 50!

Wyrażenia algebraiczne i dowodzenie

TEORIA I WZORY

Karta CKE podaje wzory skróconego mnożenia tylko dla dwóch składników. Tutaj: wersje z trzema składnikami, ogólny rozkład różnicy potęg oraz komplet narzędzi do zadań „wykaż, że...” - czyli jak z tezy zrobić coś, co jest *oczywiście* prawdziwe.

2.1 DODATKOWE WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

- Kwadrat sumy trzech składników działa jak dla dwóch, tylko dłużej: kwadrat *każdego* składnika plus podwojone iloczyny *każdej pary*.

Kwadrat sumy trzech składników

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Warianty ze znakami minus

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac$$

- Zasada znaków: kwadraty zawsze na plus; podwojony iloczyn pary jest dodatni, gdy oba składniki mają ten sam znak, a ujemny - gdy różne.

PRZYKŁAD

$(x + 2y - 3)^2 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y$. Para $(x, 2y)$ - oba na plus, więc $+4xy$; pary z -3 dają minusy.

Wskazówka. $(-a - b)^2 = (a + b)^2$ - minus sprzed całego nawiasu „znika” przy podnoszeniu do kwadratu.

Różnica n -tych potęg [R]

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

- Pierwszy nawias zawsze $(a - b)$, w drugim potęgi a maleją, potęgi b rosną, wszystkie znaki na plus. Dla $n = 2$ i $n = 3$ dostajesz znane wzory z karty.

PRZYKŁAD

$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ - albo szybciej, dwa razy różnica kwadratów: $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

2.2 TECHNIKI DOWODZENIA NIERÓWNOŚCI

- Plan każdego dowodu nierówności: przenieś wszystko na jedną stronę, uporządkuj i próbuj zwinąć w kwadrat (lub sumę kwadratów). Kwadrat jest zawsze ≥ 0 - i dowód gotowy.

Oczywista prawda

$$(w)^2 \geq 0$$

Klasyczna nierówność pomocnicza

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (\text{równość dla } a = b)$$

- To po prostu rozwinięty wzór $(a - b)^2 \geq 0$: rozpisz kwadrat i przenieś $2ab$. Połowa naturalnych dowodów kończy się właśnie tym krokiem.

PRZYKŁAD

Wykaż, że $x^2 + 9 \geq 6x$ dla każdego x . Przenosimy: $x^2 - 6x + 9 \geq 0$, czyli $(x - 3)^2 \geq 0$ - prawda, bo kwadrat jest nieujemny. ■

Wskazówka. W przekształceniach: pozbywaj się ułamków (mnożąc przez dodatni mianownik), pierwiastków (podnosząc do kwadratu, gdy obie strony nieujemne) i szukaj wzorów skróconego mnożenia.

2.3 NIERÓWNOŚCI MIĘDZY ŚREDNIMI [R]

- Dla liczb dodatnich cztery rodzaje średnich zawsze ustawiają się w tej samej kolejności: kwadratowa $\geq$ arytmetyczna $\geq$ geometryczna $\geq$ harmoniczna (zapamiętaj: KAGH). Równość tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są identyczne.

$$\underbrace{\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}}_{\text{kwadratowa}} \geq \underbrace{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}}_{\text{arytmetyczna}} \geq \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}}_{\text{geometryczna}} \geq \underbrace{\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}}_{\text{harmoniczna}}$$

Najczęściej używane przypadki ($n = 2$ i $n = 3$) [R]

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \qquad \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

PRZYKŁAD

Wykaż, że dla $a, b > 0$ zachodzi $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Ze średnich (arytmetyczna $\geq$ geometryczna) dla liczb $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$: $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 1$, czyli $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. ■

Funkcje

TEORIA I WZORY

Funkcja to maszynka: wrzucasz x (argument), wypada y (wartość). Karta CKE nie definiuje ani podstawowych pojęć, ani tego, jak przesuwanie i odbijanie wykresu zmienia wzór - a to pojawia się na niemal każdej maturze.

3.1 POJĘCIA, KTÓRYCH NIE DEFINIUJĄ TABLICE

- **Dziedzina D** - zbiór wszystkich argumentów (x -ów), które wolno wrzucić do funkcji.
- **Zbiór wartości ZW** - zbiór wszystkich wyników (y -ów), które funkcja potrafi zwrócić.
- **Miejsce zerowe** - argument x_0 , dla którego $f(x_0) = 0$; na wykresie: przecięcie z osią Ox .
- **Oś odciętych** - oś Ox ; **oś rzędnych** - oś Oy .
- Ćwiartki numerujemy od I (obie współrzędne dodatnie) *przeciwnie* do ruchu wskazówek zegara.

3.2 WYZNACZANIE DZIEDZINY - KONIECZNE ZAŁOŻENIA

- Dziedzinę „psują” tylko dwie rzeczy: dzielenie przez zero i ujemna liczba pod pierwiastkiem parzystego stopnia. Patrzysz na wzór i wyklucasz oba zagrożenia.

$$f(x) = \frac{A}{B} \Rightarrow B \neq 0 \quad f(x) = \sqrt{A} \Rightarrow A \geq 0 \quad f(x) = \frac{A}{\sqrt{B}} \Rightarrow B > 0$$

PRZYKŁAD

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$: pierwiastek jest w mianowniku, więc $x - 2 > 0$ (nie wystarczy $\geq$!), czyli $D = (2, +\infty)$.

3.3 CHARAKTERYSTYCZNE PUNKTY WYKRESU

Punkt przecięcia z osią Oy

$$(0, f(0))$$

- Na osi Oy zawsze $x = 0$ - więc po prostu podstawiasz zero do wzoru. Każda funkcja przecina oś Oy co najwyżej raz.

Punkty przecięcia z osią Ox

- Na osi Ox zawsze $y = 0$ - rozwiązujesz równanie $f(x) = 0$. Rozwiązań (miejsc zerowych) może być wiele.

PRZYKŁAD

$f(x) = x^2 - 4$. Oś Oy : $f(0) = -4$, punkt $(0, -4)$. Oś Ox : $x^2 - 4 = 0$, czyli $x = \pm 2$ - punkty $(-2, 0)$ i $(2, 0)$.

Wskazówka. Jeśli punkt $P = (x_p, y_p)$ należy do wykresu funkcji f , to jego współrzędne spełniają równanie: $y_p = f(x_p)$. Podstawiasz i wyliczasz niewiadome - tak znajduje się nieznane współczynniki we wzorze funkcji.

3.4 PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESU FUNKCJI

- Zmiana *przy* x (w nawiasie) działa poziomo i „na odwrót niż intuicja”: $f(x-2)$ to przesunięcie w *prawo*. Zmiana *poza* nawiasem działa pionowo i zgodnie z intuicją: $f(x) + 3$ to w *górę*. Minus przed f odbija w pionie, minus przy x - w poziomie.

Nowy wzór	Efekt geometryczny
$y = f(x - a)$	przesunięcie o a w prawo
$y = f(x + a)$	przesunięcie o a w lewo
$y = f(x) + b$	przesunięcie o b w górę
$y = f(x) - b$	przesunięcie o b w dół
$y = -f(x)$	odbicie względem osi Ox
$y = f(-x)$	odbicie względem osi Oy
$y = -f(-x)$	odbicie względem punktu $(0, 0)$
$y = f(x) $ [R]	część pod osią Ox odbita do góry
$y = f(x)$ [R]	prawa część wykresu odbita na lewą stronę

PRZYKŁAD

Wykres $g(x) = (x + 1)^2 - 3$ to parabola $y = x^2$ przesunięta o 1 w *lewo* (bo $x + 1$) i o 3 w *dół*. Jej wierzchołek: $(-1, -3)$.

Proste pozioma i pionowa

$y = a$ - prosta pozioma przez $(0, a)$

$x = a$ - prosta pionowa przez $(a, 0)$

- $y = a$ to wszystkie punkty o wysokości a (linia pozioma); $x = a$ to wszystkie punkty o odciętej a (linia pionowa). Prosta pionowa *nie jest* wykresem żadnej funkcji.

Funkcja liniowa i funkcja kwadratowa

TEORIA I WZORY

Dwie najczęściej odpytywane funkcje na maturze. Karta CKE daje deltę, postaci trójmianu i wzory Viète'a - ale milczy o tym, jak *szybko* znaleźć wierzchołek z miejsc zerowych, co oznaczają współczynniki a , b , c na wykresie i jak szukać wartości największej na przedziale.

4.1 FUNKCJA LINIOWA

- Wzór ogólny: $f(x) = ax + b$, gdzie a to współczynnik kierunkowy, a b - wyraz wolny.

Współczynnik kierunkowy prostej przez dwa punkty

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (x_A \neq x_B)$$

- Licznik: o ile zmienił się y . Mianownik: o ile zmienił się x . Czyli a mówi, o ile prosta „wjeżdża do góry” na każdą jednostkę w prawo.

PRZYKŁAD

Prosta przez $A = (1, 2)$ i $B = (3, 8)$: $a = \frac{8-2}{3-1} = 3$. Potem b z podstawienia A : $2 = 3 \cdot 1 + b$, więc $b = -1$ i $y = 3x - 1$.

Miejsce zerowe

$$x_0 = -\frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

- Bierze się z rozwiązania $ax + b = 0$. Nie musisz go pamiętać - ale przyspiesza zadania zamknięte.

Interpretacja współczynników

- $a > 0$ - funkcja rosnąca, $a = 0$ - stała, $a < 0$ - malejąca,
- wykres przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.

Wskazówka. Punkt przecięcia dwóch prostych = rozwiązanie układu ich równań. Prosta przez dwa punkty = podstaw oba punkty do $y = ax + b$ i rozwiąż układ z niewiadomymi a i b .

4.2 FUNKCJA KWADRATOWA

- Wzór ogólny: $f(x) = ax^2 + bx + c$ przy $a \neq 0$; wykresem jest parabola o wierzchołku $W = (p, q)$.

Przecięcie z osią Oy

$$f(0) = c \Rightarrow \text{punkt } (0, c)$$

- Wyraz wolny c to po prostu wysokość, na której parabola przecina oś Oy - widzisz to bez liczenia, podstawiając $x = 0$.

Współrzędna p wierzchołka z miejsc zerowych

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (\text{dla } \Delta > 0) \qquad p = x_0 \quad (\text{dla } \Delta = 0)$$

- Parabola jest symetryczna, więc wierzchołek leży *dokładnie pośrodku* między miejscami zerowymi - średnia arytmetyczna i gotowe. Szybsze niż $p = \frac{-b}{2a}$, gdy miejsca zerowe już znasz.

Współrzędna q wierzchołka - zawsze

$$q = f(p)$$

- Zamiast pamiętać $q = \frac{-\Delta}{4a}$: wierzchołek leży *na* paraboli, więc jego druga współrzędna to po prostu wartość funkcji w p .

PRZYKŁAD

$f(x) = x^2 - 6x + 8$, miejsca zerowe: $x_1 = 2, x_2 = 4$. Wierzchołek: $p = \frac{2+4}{2} = 3, q = f(3) = 9 - 18 + 8 = -1$. Czyli $W = (3, -1)$.

Równe wartości funkcji

$$f(a) = f(b) \Rightarrow p = \frac{a+b}{2}$$

- Jeśli parabola w dwóch argumentach ma *tę samą* wartość, to te argumenty leżą symetrycznie względem wierzchołka - więc p to ich średnia. Uogólnienie wzoru z miejscami zerowymi (0 też jest „tą samą wartością”).

Postać iloczynowa dla $\Delta = 0$

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

- Gdy $\Delta = 0$, jedyne miejsce zerowe występuje „podwójnie”. Gdy $\Delta < 0$ - miejsc zerowych nie ma i postać iloczynowa *nie istnieje*.

4.3 NAJMNIEJSZA I NAJWIĘKSZA WARTOŚĆ NA PRZEDZIALE

- Na przedziale domkniętym kandydatów jest najwyżej trzech: oba końce przedziału oraz wierzchołek - o ile w ogóle wpada do przedziału. Liczysz wartości i wybierasz najmniejszą/największą.

PRZYKŁAD

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ na $\langle 0, 4 \rangle$. Kandydaci: $f(0) = 8$, $f(4) = 0$ oraz - bo $p = 3 \in \langle 0, 4 \rangle$ - $f(3) = -1$.
Najmniejsza wartość: -1 , największa: 8 .

Solve

Wielomiany i funkcje wymierne

TEORIA I WZORY

Jak znaleźć pierwiastek wielomianu, gdy nie widać go gołym okiem? Skąd wiadomo, przez co próbować dzielić? Karta CKE podaje tylko wzory na Δ i sześciiany - cała „strategia” rozwiązywania równań stopnia 3 i wyżej jest poza nią.

5.1 PIERWIASTKI WIELOMIANU O WSPÓŁCZYNNIKACH CAŁKOWITYCH [R]

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych

Jeżeli wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity p , to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

- Czyli: kandydatów na całkowity pierwiastek szukasz *wyłącznie* wśród dzielników liczby stojącej na końcu wielomianu (z plusem i minusem). Podstawiasz po kolei, aż któryś wyzeruje wielomian.

PRZYKŁAD

$W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Wyraz wolny: 6, kandydaci: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Sprawdzamy: $W(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$ - trafiony. Dzielimy $W(x)$ przez $(x + 1)$ i rozwiązujemy dalej równanie kwadratowe.

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych

Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych, to p dzieli wyraz wolny a_0 , a q dzieli współczynnik przy najwyższej potęgde a_n .

- Wersja dla ułamków: licznik bierzesz z dzielników końca, mianownik - z dzielników początku. Używane, gdy współczynnik przy najwyższej potęgde to nie 1.

5.2 DZIELENIE WIELOMIANÓW [R]

Równość z dzielenia z resztą

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x), \quad \deg R < \deg P$$

- Dokładnie jak w liczbach: $17 = 5 \cdot 3 + 2$. Dzielna = dzielnik razy iloraz plus reszta, a reszta jest „mniejsza” (niższego stopnia) niż dzielnik.

Reszta z dzielenia przez dwumian

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x - a)$ jest równa $W(a)$.

- Nie musisz wykonywać dzielenia! Chcesz resztę z dzielenia przez $(x - 2)$? Po prostu policz $W(2)$. Szczególny przypadek: $W(a) = 0$ oznacza, że $(x - a)$ dzieli wielomian bez reszty (twierdzenie Bézouta).

PRZYKŁAD

Reszta z dzielenia $W(x) = x^3 + 2x - 1$ przez $(x - 2)$: $W(2) = 8 + 4 - 1 = 11$. Koniec zadania.

Wskazówka. Schemat Hornera pozwala szybko dzielić wielomian przez $(x - a)$: wypisz współczynniki, przepisz pierwszy, każdy kolejny to poprzedni wynik razy a plus bieżący współczynnik.

Krotność pierwiastka

Jeśli x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym, to $W(x) = (x - x_0)^k \cdot Q(x)$, gdzie $Q(x_0) \neq 0$.

- Krotność widać na wykresie: przy krotności *parzystej* wykres dotyka osi Ox i zawraca (jak parabola w wierzchołku), przy *nieparzystej* - przebiega oś na drugą stronę.

5.3 FUNKCJA HOMOGRAFICZNA [R]

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$$

- To „ułamek z liniowych” - jego wykresem jest hiperbola. Najważniejsze w zadaniach są asymptoty, czyli proste, do których wykres się zbliża, ale ich nie dotyka.

Asymptoty

$$\text{pionowa: } x = -\frac{d}{c} \quad \text{pozioma: } y = \frac{a}{c}$$

- Pionowa: tam, gdzie zeruje się mianownik (dzielić przez zero nie wolno, więc wykres „ucieka”). Pozioma: iloraz współczynników przy x - tyle wynosi granica funkcji w $\pm\infty$.

Przesunięcie hiperboli

Wykres $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$ to hiperbola $y = \frac{a}{x}$ przesunięta o wektor $[p, q]$; asymptoty: $x = p$ oraz $y = q$.

PRZYKŁAD

$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$: asymptota pionowa $x = 1$ (mianownik zeruje się dla $x = 1$), pozioma $y = \frac{2}{1} = 2$.
Dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

TEORIA I WZORY

Karta CKE podaje prawa działań na potęgach i logarytmach - ale ani słowa o samych *funkcjach*: kiedy są rosnące, kiedy malejące i dlaczego przy podstawie mniejszej od 1 trzeba odwrócić znak nierówności. A to właśnie na tym wykłada się najwięcej osób.

6.1 MONOTONICZNOŚĆ - KLUCZ DO RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna o podstawie a

$a > 1$ - obie rosnące

$0 < a < 1$ - obie malejące

■ Podstawa większa od 1: im większy wykładnik/argument, tym większa wartość (wzrost). Podstawa ułamkowa: kolejne potęgi *maleją* - np. $\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3$ to $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

Nierówności wykładnicze i logarytmiczne

$$a > 1 : a^x < a^y \iff x < y$$

$$0 < a < 1 : a^x < a^y \iff x > y$$

■ Przy podstawie $a > 1$ znak nierówności zostaje. Przy $0 < a < 1$ funkcja maleje, więc porównując wykładniki musisz *odwrócić znak*. Ta sama zasada dotyczy logarytmów. Zapomnienie o odwróceniu = najczęstszy błąd w tym dziale.

PRZYKŁAD

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$, czyli $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Podstawa $\frac{1}{2} < 1$, więc odwracamy: $x < 3$.

Równość potęg o tej samej podstawie

$$a^x = a^y \iff x = y \quad (a > 0, a \neq 1)$$

■ Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa - każdą wartość przyjmuje dokładnie raz. Dlatego równanie wykładnicze rozwiązujesz, sprowadzając obie strony do tej samej podstawy i porównując wykładniki.

PRZYKŁAD

$4^x = 8$. Wspólna podstawa 2: $2^{2x} = 2^3$, więc $2x = 3$ i $x = \frac{3}{2}$.

6.2 ZAŁOŻENIA PRZY LOGARYTMACH

- Zanim ruszysz równanie logarytmiczne, zapisz dziedzinę - bez tego rozwiązanie może być błędne, a na maturze tracisz punkty.

$$\log_a b \text{ istnieje} \iff a > 0, a \neq 1, b > 0$$

PRZYKŁAD

$\log_2(x - 3) = 1$. Dziedzina: $x - 3 > 0$, czyli $x > 3$. Równanie: $x - 3 = 2^1$, więc $x = 5$ - należy do dziedziny, OK.

6.3 CHARAKTERYSTYCZNE PUNKTY I ASYMPTOTY WYKRESÓW

Funkcja wykładnicza $y = a^x$

Zawsze przechodzi przez punkt $(0, 1)$, bo $a^0 = 1$; oś Ox jest jej asymptotą poziomą; przyjmuje tylko wartości dodatnie: $ZW = (0, +\infty)$.

Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$

Zawsze przechodzi przez punkt $(1, 0)$, bo $\log_a 1 = 0$; oś Oy jest jej asymptotą pionową; dziedzina: $D = (0, +\infty)$.

- Te dwa punkty - $(0, 1)$ dla wykładniczej i $(1, 0)$ dla logarytmicznej - to pierwsza rzecz, którą sprawdzasz przy rozpoznawaniu wykresu w zadaniu zamkniętym. Obie funkcje są swoimi odbiciami względem prostej $y = x$.

Ciągi

TEORIA I WZORY

Karta CKE podaje wzory na n -ty wyraz i sumę - zawsze „startując” od a_1 . Ale w zadaniach często znasz np. a_5 , a pytają o a_9 . Poniższe wzory pozwalają skakać między *dowolnymi* wyrazami bez wyznaczania a_1 .

7.1 ZALEŻNOŚCI MIĘDZY DOWOLNYMI WYRAZAMI

Ciąg arytmetyczny - wyraz n -ty względem wyrazu k -tego

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot r$$

- Z wyrazu a_k do wyrazu a_n robisz $(n - k)$ „kroków”, a każdy krok to dodanie różnicy r . Wzór z karty to przypadek $k = 1$.

Ciąg geometryczny - wyraz n -ty względem wyrazu k -tego

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

- Tak samo, tylko każdy krok to *mnożenie* przez iloraz q .

PRZYKŁAD

W ciągu arytmetycznym $a_5 = 7$ i $r = 3$. Wtedy $a_9 = a_5 + (9 - 5) \cdot 3 = 7 + 12 = 19$ - bez liczenia a_1 .

Wskazówka. Indeksy „sumują się”: $a_7 = a_5 + 2r$ (arytmetyczny) albo $a_7 = a_5 \cdot q^2$ (geometryczny), bo $7 = 5 + 2$.

7.2 WŁASNOŚĆ ŚRODKOWEGO WYRAZU

- Trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego: środkowy jest średnią sąsiadów. W geometrycznym: kwadrat środkowego to iloczyn sąsiadów. To najczęstszy sposób układania równania w zadaniach typu „liczby x , $x + 4$, $3x$ tworzą ciąg...”.

Ciąg arytmetyczny - średnia arytmetyczna sąsiadów

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ciąg geometryczny - kwadrat wyrazu środkowego

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

PRZYKŁAD

Liczby 2, x , 18 tworzą ciąg geometryczny. Wtedy $x^2 = 2 \cdot 18 = 36$, czyli $x = 6$ lub $x = -6$.

7.3 MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU

- Ciąg badasz jak schody: liczysz różnicę między kolejnym a bieżącym stopniem. Różnica stale dodatnia - schody idą w górę (ciąg rosnący); stale ujemna - w dół.

Dowolny ciąg - badamy znak różnicy

$$a_{n+1} - a_n > 0 - \text{rosnący}$$

$$a_{n+1} - a_n < 0 - \text{malejący}$$

Ciąg arytmetyczny

$$r > 0 - \text{rosnący}, \quad r = 0 - \text{stały}, \quad r < 0 - \text{malejący}$$

PRZYKŁAD

$a_n = n^2 - 10n$. Różnica: $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 10(n+1) - n^2 + 10n = 2n - 9$. Dla $n \leq 4$ ujemna, dla $n \geq 5$ dodatnia - ciąg najpierw maleje, potem rośnie (nie jest monotoniczny).

7.4 GRANICE [R]

Liczba e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718$$

- Wyrażenie w nawiasie dąży do 1, ale potęga rośnie - i te dwa efekty „remisują” dokładnie na liczbie e . Podstawa logarytmu naturalnego.

Granica ilorazu wielomianów (reguła praktyczna)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + \dots}{b_m n^m + \dots} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k < m, \\ \frac{a_k}{b_m} & \text{gdy } k = m, \\ \pm\infty & \text{gdy } k > m. \end{cases}$$

- Dla ogromnych n liczy się tylko najwyższa potęga - reszta to „drobne”. Porównujesz stopień licznika ze stopniem mianownika: wygrywa mianownik $\rightarrow$ granica 0; remis $\rightarrow$ iloraz współczynników; wygrywa licznik $\rightarrow$ nieskończoność.

PRZYKŁAD

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 5} = \frac{3}{2} \text{ (stopnie równe - iloraz współczynników przy } n^2 \text{).}$$

Warunek zbieżności szeregu geometrycznego

$$|q| < 1 \quad \text{czyli} \quad -1 < q < 1$$

- Wzór $S = \frac{a_1}{1-q}$ z karty wolno stosować *tylko* przy tym warunku - gdy kolejne wyrazy maleją do zera. W zadaniach z parametrem najpierw zapisz $|q| < 1$, dopiero potem liczyć sumę.

Solve

Trygonometria

TEORIA I WZORY

Karta CKE ma tabelę wartości i wzory na sinus/cosinus sumy - ale nie mówi, jaki *znak* ma funkcja w danej ćwiartce, i nie podaje żadnych wzorów z tangensem sumy. Te braki uzupełniamy tutaj.

8.1 ZNAKI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH W ĆWIARTKACH

- Zanim policzysz wartość funkcji kąta rozwartego, musisz wiedzieć, czy wynik wyjdzie na plus, czy na minus - o tym decyduje ćwiartka, w której „ląduje” ramię kąta.

Ćwiartka	sin	cos	tg	ctg
I (0°–90°)	+	+	+	+
II (90°–180°)	+	–	–	–
III (180°–270°)	–	–	+	+
IV (270°–360°)	–	+	–	–

Wskazówka. Wierszyk: „W pierwszej wszystkie są dodatnie, w drugiej tylko sinus, w trzeciej tangens i cotangens, w czwartej cosinus”.

PRZYKŁAD

$\cos 150^\circ$: kąt leży w II ćwiartce, gdzie cosinus jest ujemny, a wartość „bazowa” to $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8.2 KĄTY OSTRE W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM

- Kąty ostre trójkąta prostokątnego dopełniają się do 90° - a przyprostokątna „naprzeciw” jednego kąta jest „przy” drugim. Dlatego sinus jednego równa się cosinusowi drugiego.

Jeżeli $\alpha + \beta = 90^\circ$, to:

$$\sin \alpha = \cos \beta \qquad \text{tg } \alpha = \text{ctg } \beta$$

PRZYKŁAD

$\sin 62^\circ = \cos 28^\circ$ - bo $62^\circ + 28^\circ = 90^\circ$. Typowe zadanie zamknięte: „wyrażenie $\frac{\sin 62^\circ}{\cos 28^\circ}$ jest równe...” - odpowiedź: 1.

8.3 TANGENS SUMY I RÓŻNICY [R]

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

■ Karta podaje sumy tylko dla sinusa i cosinusa. Zapamiętaj krzyżowy układ znaków: w liczniku znak zgodny z działaniem, w mianowniku - przeciwny.

Tangens podwojonego kąta [R]

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

PRZYKŁAD

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}. \text{ Wtedy } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

8.4 FUNKCJE PODWOJONEGO KĄTA PRZEZ TANGENS [R]

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

■ Bardzo praktyczne: znasz *sam tangens* i od razu dostajesz $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$ - bez wyznaczania sinusa i cosinusa z jedynki trygonometrycznej.

8.5 FUNKCJE POTROJONEGO KĄTA [R]

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

■ Mnemotechnika: w obu wzorach występują liczby 3 i 4, sinus „zaczyna od 3” ($3 \sin \alpha - \dots$), cosinus „zaczyna od 4” ($4 \cos^3 \alpha - \dots$).

8.6 SUMA I RÓŻNICA SINUSA I COSINUSA TEGO SAMEGO KĄTA [R]

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

■ Suma dwóch „falek” to znowu jedna falka - przesunięta i podciągnięta $\sqrt{2}$ razy. Stąd np. od razu widać, że największa wartość $\sin x + \cos x$ to $\sqrt{2}$.

8.7 ZAMIANA STOPNI NA RADIANY [R]

$$\alpha [\text{rad}] = \alpha [^\circ] \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

■ Radian to inna jednostka miary kąta: pełny kąt to 2π zamiast 360° . Przelicznik bierze się z proporcji $180^\circ = \pi$.

stopnie	30°	45°	60°	90°	180°	360°
radiany	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Solve

Planimetria

TEORIA I WZORY

Najobszerniejszy zestaw braków w karcie CKE: kąty wielokątów, przekątne kwadratu i sześciokąta, trójkąty „charakterystyczne”, promienie okręgów w trójkącie prostokątnym, własności stycznych. Bez tych faktów wiele zadań z planimetrii w ogóle nie ruszy.

9.1 WIELOKĄTY

Suma kątów wewnętrznych n -kąta

$$(n - 2) \cdot 180^\circ$$

- Każdy n -kąt można pociąć przekątnymi z jednego wierzchołka na $(n - 2)$ trójkąty, a każdy trójkąt „wnosi” 180° .

Kąt wewnętrzny n -kąta foremnego

$$\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

- W wielokącie foremnym wszystkie kąty są równe - więc sumę dzielisz przez liczbę kątów.

Liczba przekątnych n -kąta

$$\frac{n(n - 3)}{2}$$

- Z każdego z n wierzchołków wychodzą przekątne do $(n - 3)$ innych (pomijamy jego samego i dwóch sąsiadów - to boki). Dzielimy przez 2, bo każdą przekątną policzyliśmy dwa razy.

PRZYKŁAD

Ośmiokąt foremny: kąt wewnętrzny $= \frac{6 \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$; liczba przekątnych $= \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.

9.2 TRÓJKĄT - WARUNEK ISTNIENIA I RODZAJ

Nierówność trójkąta

$$a + b > c$$

- Trójkąt o bokach a, b, c istnieje tylko wtedy, gdy suma *dwóch krótszych* boków przekracza najdłuższy. Odcinki 2, 3, 7 trójkąta nie utworzą, bo $2 + 3 < 7$.

Rodzaj trójkąta z kwadratów boków (c - najdłuższy bok)

$$a^2 + b^2 > c^2 - \text{ostrokątny} \quad a^2 + b^2 = c^2 - \text{prostokątny} \quad a^2 + b^2 < c^2 - \text{rozwartokątny}$$

- Rozszerzenie twierdzenia Pitagorasa: porównujesz sumę kwadratów krótszych boków z kwadratem najdłuższego i od razu znasz typ trójkąta.

PRZYKŁAD

Boki 4, 5, 6: $16 + 25 = 41 > 36$ - trójkąt ostrokątny. Boki 3, 4, 6: $9 + 16 = 25 < 36$ - rozwartokątny.

9.3 KĄTY PRZY PRZECINAJĄCYCH SIĘ PROSTYCH

- Słownictwo i fakty, które karta pomija, a które pojawiają się w treściach zadań: dwie przecinające się proste tworzą kąty *wierzchołkowe* (naprzeciwko siebie - równe) i *przyległe* (obok siebie - sumują się do 180°).

Prosta przecinająca dwie proste równoległe

Równe są: kąty **odpowiadające** (po tej samej stronie, „w tym samym rogu”) oraz kąty **naprzemianległe** (po przeciwnych stronach prostej tnącej).

PRZYKŁAD

Typowy trik: kąt między ramieniem trapezu a podstawą dolną wynosi 70° , więc kąt między tym samym ramieniem a podstawą górną to $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ (kąty jednostronne przy prostych równoległych sumują się do 180°).

9.4 KWADRAT**Przekątna i pole przez przekątną**

$$d = a\sqrt{2} \quad P = a^2 = \frac{d^2}{2}$$

- Przekątna dzieli kwadrat na dwa trójkąty prostokątne równoramienne - stąd $\sqrt{2}$ z twierdzenia Pitagorasa.

Okrąg opisany i wpisany

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad r = \frac{a}{2}$$

- Okrąg opisany przechodzi przez wierzchołki - jego średnica to przekątna kwadratu ($2R = a\sqrt{2}$). Okrąg wpisany dotyka boków - jego średnica to bok ($2r = a$).

9.5 SZEŚCIOKĄT FOREMNY

- Sześciokąt foremny to sześć trójkątów równobocznych sklejonych w „plaster miodu”. Wszystkie jego wielkości wyliczasz z trójkąta równobocznego o boku a .

Przekątne i pole

$$d_{\text{krótsza}} = a\sqrt{3} \qquad d_{\text{dłuższa}} = 2a \qquad P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

9.6 TRÓJKĄTY CHARAKTERYSTYCZNE

- Dwa trójkąty, których proporcje boków musisz znać na pamięć - połowa zadań z planimetrii i stereometrii na nich stoi.

Trójkąt $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ (połowa trójkąta równobocznego)

Naprzeciw 30° leży a (najkrótszy bok), naprzeciw 60° leży $a\sqrt{3}$, przeciwprostokątna: $2a$.

Trójkąt $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ (połowa kwadratu)

Przyprostokątne: a , przeciwprostokątna: $a\sqrt{2}$.

PRZYKŁAD

W trójkącie prostokątnym kąt 30° i przeciwprostokątna 10. Najkrótszy bok (naprzeciw 30°) to połowa przeciwprostokątnej: 5; drugi: $5\sqrt{3}$.

9.7 TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY

Związek promieni

$$R = 2r$$

- Środek trójkąta równobocznego dzieli każdą wysokość w stosunku 2 : 1: dłuższy kawałek (od wierzchołka) to promień okręgu opisanego R , krótszy - wpisanego r . Karta podaje $R = \frac{2}{3}h$ i $r = \frac{1}{3}h$ osobno; warto wiedzieć, że jedno jest dwa razy większe od drugiego.

9.8 TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

Promień okręgu opisanego

$$R = \frac{c}{2}$$

- Kąt prosty jest kątem wpisanym opartym na średnicy - więc przeciwprostokątna *jest* średnicą, a środek okręgu opisanego leży w jej połowie.

Promień okręgu wpisanego

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

■ a, b - przyprostokątne, c - przeciwprostokątna. Ten wzór działa *tylko* w trójkącie prostokątnym; w dowolnym trójkącie zostaje ogólne $r = \frac{p}{2}$ z karty (gdzie p to połowa obwodu).

PRZYKŁAD

Trójkąt o bokach 3, 4, 5: $R = \frac{5}{2} = 2,5$ oraz $r = \frac{3+4-5}{2} = 1$.

9.9 OKRĄG I STYCZNE**Równość odcinków stycznych**

Odcinki stycznych poprowadzonych z punktu P do okręgu są równe: $|PA| = |PB|$.

■ Z jednego punktu na zewnątrz okręgu poprowadzisz dokładnie dwie styczne - i obie „dotkną” okręgu w tej samej odległości od P . Kluczowe w zadaniach z okręgiem wpisanym: odcinki od wierzchołka do punktów styczności są równe.

Styczna a promień

Kąt między styczną a promieniem poprowadzonym do punktu styczności jest prosty.

Wzajemne położenie dwóch okręgów

styczne zewnętrznie: $d = R + r$

styczne wewnętrznie: $d = |R - r|$

■ d to odległość środków. Styczność zewnętrzna: okręgi „styka się brzuchami” - odcinek między środkami to suma promieni. Wewnętrzna: mały okrąg dotyka dużego od środka - odległość środków to różnica promieni.

9.10 TRAPEZ**Odcinek łączący środki ramion (linia środkowa)**

$$x = \frac{a + b}{2}$$

■ Linia środkowa jest równoległa do obu podstaw, a jej długość to ich średnia arytmetyczna.

9.11 PODOBIENSTWO FIGUR

$$\frac{P_1}{P_2} = k^2$$

- Skala k dotyczy *długości* (boków, wysokości, obwodów). Pola rosną z kwadratem skali: figura 3 razy „większa” liniowo ma pole 9 razy większe.

PRZYKŁAD

Trójkąty podobne w skali $k = 2$, pole mniejszego wynosi 5. Pole większego: $5 \cdot 2^2 = 20$.

9.12 CZWOROKĄTY W OKRĘGU [R]**Czworokąt wpisany w okrąg**

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

- W czworokącie wpisanym w okrąg przeciwległe kąty sumują się do 180° . Działa też w drugą stronę - to test, czy na czworokącie da się opisać okrąg.

Czworokąt opisany na okręgu

$$a + c = b + d$$

- W czworokącie opisanym na okręgu sumy przeciwległych boków są równe (konsekwencja równości odcinków stycznych).

Twierdzenie Ptolemeusza

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$$

- Tylko dla czworokąta wpisanego w okrąg: iloczyn przekątnych = suma iloczynów przeciwległych boków.

9.13 TWIERDZENIA RACHUNKOWE [R]**Twierdzenie o dwusiecznej**

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

- Dwusieczna kąta A trafia w bok BC w punkcie D i dzieli go w *takim samym stosunku*, w jakim pozostają boki wychodzące z A . Dłuższy bok - dłuższy kawałek po jego stronie.

PRZYKŁAD

$|AB| = 6$, $|AC| = 4$, $|BC| = 5$. Dwusieczna z A dzieli BC w stosunku $6 : 4 = 3 : 2$, czyli $|BD| = 3$ i $|DC| = 2$.

Twierdzenie o siecznych (potęga punktu)

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \qquad |PT|^2 = |PA| \cdot |PB|$$

- Prowadzisz z punktu P dwie sieczne - iloczyny „od P do pierwszego przecięcia” razy „od P do drugiego” są równe dla obu siecznych. Styczna to przypadek graniczny: oba przecięcia sklejają się w punkt T , stąd kwadrat.

9.14 LICZBA π

$$\pi \approx 3,14 \approx \frac{22}{7}$$

Solve

Geometria analityczna

TEORIA I WZORY

Geometria na współrzędnych: każdy punkt to para liczb, każda prosta to równanie. Karta CKE podaje odległość punktów, środek odcinka i odległość punktu od prostej - tu dokładamy symetrie, środek ciężkości, pole trójkąta „z współrzędnych” i test współliniowości.

10.1 WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY

Prosta przez punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (x_A \neq x_B)$$

- „Zmiana y przez zmianę x ” - o ile prosta rośnie na jednostkę w prawo. Gdy $x_A = x_B$, prosta jest pionowa i współczynnik kierunkowy nie istnieje (równanie: $x = x_A$).

PRZYKŁAD

$A = (2, 1)$, $B = (5, 7)$: $a = \frac{7-1}{5-2} = 2$. Prosta: $y = 2x + b$; z punktu A : $1 = 4 + b$, więc $y = 2x - 3$.

Prosta o danym współczynniku a przez punkt (x_0, y_0)

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

- Gotowy wzór bez wyliczania b : podstawiasz nachylenie i punkt - i masz równanie prostej. Idealny do stycznych oraz prostych równoległych/prostopadłych przez zadany punkt.

PRZYKŁAD

Prosta prostopadła do $y = 2x + 1$ przez punkt $(4, 3)$: nachylenie $a = -\frac{1}{2}$ (bo $a_1 a_2 = -1$), więc $y = -\frac{1}{2}(x - 4) + 3 = -\frac{1}{2}x + 5$.

10.2 SYMETRIE PUNKTU W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

- Poniżej obrazy punktu $A = (x, y)$ w podstawowych symetriach.
- Odbicie względem osi Ox zmienia znak y (punkt „przeskakuje” nad/pod oś), względem Oy - znak x , względem początku układu - oba znaki.

Symetria względem	Obraz punktu
osi Ox	$(x, -y)$
osi Oy	$(-x, y)$
początku układu $(0, 0)$	$(-x, -y)$
prostej $y = x$ [R]	(y, x)

PRZYKŁAD

$A = (3, -2)$; względem Ox : $(3, 2)$; względem Oy : $(-3, -2)$; względem $(0, 0)$: $(-3, 2)$.

10.3 PUNKTY SZCZEGÓLNE TRÓJKĄTA [R]

Środek ciężkości trójkąta ABC (przecięcie środkowych)

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

■ Po prostu średnia arytmetyczna współrzędnych wierzchołków. Środek ciężkości dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1 licząc od wierzchołka.

PRZYKŁAD

$A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 3)$: $S = \left(\frac{0+6+0}{3}, \frac{0+0+3}{3} \right) = (2, 1)$.

10.4 POLE TRÓJKĄTA O DANYCH WIERZCHOŁKACH [R]

$$P = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

■ Wzór „mechaniczny”: odejmujesz od współrzędnych B i C współrzędne A (przesuwasz trójkąt tak, by A trafiło do zera), mnożysz na krzyż, odejmujesz, bierzesz połowę wartości bezwzględnej. Żadnych wysokości i rysunków.

Warunek współliniowości punktów A, B, C

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A) = 0$$

■ To samo wyrażenie równe zero oznacza: pole „trójkąta” zerowe, czyli punkty leżą na jednej prostej.

PRZYKŁAD

$A = (1, 1)$, $B = (3, 4)$, $C = (0, 5)$: $P = \frac{1}{2} |(3-1)(5-1) - (4-1)(0-1)| = \frac{1}{2} |8+3| = \frac{11}{2}$.

10.5 ODLEGŁOŚCI

Odległość dwóch prostych równoległych [R]

Dla prostych $Ax + By + C_1 = 0$ oraz $Ax + By + C_2 = 0$:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

■ Uwaga: obie proste muszą mieć *identyczne* A i B - jeśli nie mają, najpierw pomnóż jedno z równań tak, by się zgadzały.

Wskazówka. Alternatywa bez wzoru: weź dowolny punkt jednej prostej i policz jego odległość od drugiej wzorem z karty.

10.6 OKRĄG A PROSTA [R]

■ O położeniu prostej względem okręgu decyduje jedna liczba: odległość d środka okręgu od prostej, porównana z promieniem r . Tak sprawdza się styczność bez rozwiązywania układu równań.

$d < r$ - prosta jest sieczną (2 punkty wspólne)

$d = r$ - styczna (1 punkt) $d > r$ - rozłączna (0 punktów)

PRZYKŁAD

Okrąg $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ i prosta $2x + y - 7 = 0$. Odległość środka $(1, 0)$ od prostej: $d = \frac{|2+0-7|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = r$ - prosta jest styczna.

Stereometria

TEORIA I WZORY

Karta CKE podaje objętości i pola brył - ale nie przekątne, nie liczbę krawędzi, nie czworościan foremny. A przekątna sześcianu czy prostopadłościanu to punkt wyjścia większości zadań o kątach w bryłach.

11.1 SZEŚCIAN I PROSTOPADŁOŚCIAN

Przekątna sześcianu o krawędzi a

$$d = a\sqrt{3} \quad d_{\text{ściany}} = a\sqrt{2}$$

- Dwa kroki Pitagorasa: najpierw przekątna ściany (podstawy) $a\sqrt{2}$, potem trójkąt prostokątny z krawędzią pionową: $\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Przekątna prostopadłościanu o krawędziach a, b, c

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- „Trójwymiarowy Pitagoras” - kwadrat przekątnej to suma kwadratów wszystkich trzech wymiarów.

PRZYKŁAD

Prostopadłościan $3 \times 4 \times 12$: $d = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

11.2 LICZBA ŚCIAN, KRAWĘDZI I WIERZCHOŁKÓW

- Nie ucz się tabelki na pamięć - wyobraź sobie bryłę: graniastosłup ma n ścian bocznych + 2 podstawy; krawędzie to dwa n -kąty ($2n$) plus n „pionowych”. Ostrosłup: n ścian bocznych + 1 podstawa, krawędzie: n w podstawie + n do wierzchołka.

Bryła (n -kąt w podstawie)	Ściany	Krawędzie	Wierzchołki
graniastosłup	$n + 2$	$3n$	$2n$
ostrosłup	$n + 1$	$2n$	$n + 1$

PRZYKŁAD

Graniastosłup o 24 krawędziach: $3n = 24$, czyli $n = 8$ - w podstawie ośmiokąt, ścian jest 10, wierzchołków 16.

Wskazówka. Bryła **prawidłowa** ma w podstawie wielokąt foremny; ściany boczne to odpowiednio prostokąty (graniastosłup) lub przystające trójkąty równoramienne (ostrosłup).

11.3 CZWOROŚCIAN FOREMNY

- Czworoscian foremny to ostrosłup, którego *wszystkie* cztery ściany są trójkątami równobocznymi. Jego wysokość i objętość liczy się na maturze na tyle często, że warto znać wyniki na pamięć.

Wysokość i objętość

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \qquad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

11.4 KĄTY W BRYŁACH - JAK JE ZNALEŹĆ

- Karta nie definiuje kątów, o które pytają zadania. **Kąt między prostą a płaszczyzną:** kąt między prostą a jej rzutem *prostokątnym* na tę płaszczyznę („cieniem”). **Kąt dwuścienny** (między ścianami): kąt między dwiema prostymi - po jednej w każdej ścianie - prostopadłymi do wspólnej krawędzi w tym samym punkcie.

Wskazówka. Strategia: znajdź trójkąt prostokątny zawierający szukany kąt (zwykle: wysokość bryły + rzut + odcinek nachylony) i użyj tangensa. Przekątna z poprzednich wzorów to często przeciwprostokątna tego trójkąta.

PRZYKŁAD

Kąt między przekątną sześcianu a płaszczyzną podstawy: rzut przekątnej na podstawę to przekątna podstawy $a\sqrt{2}$, wysokość nad rzutem to a . Zatem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.5 PODOBIENSTWO BRYŁ

$$\frac{P_1}{P_2} = k^2 \qquad \frac{V_1}{V_2} = k^3$$

- Skala k dotyczy długości. Pola (powierzchnie) rosną z kwadratem, a objętości - z sześcianem skali. Bryła 2 razy większa liniowo ma 4 razy większe pole powierzchni i 8 razy większą objętość.

PRZYKŁAD

Przekrój ostrosłupa płaszczyzną równoległą do podstawy w połowie wysokości odcina mały ostrosłup podobny w skali $k = \frac{1}{2}$. Jego objętość to $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ objętości całego.

Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i statystyka

TEORIA I WZORY

Karta CKE podaje wzory na permutacje, kombinacje i klasyczne prawdopodobieństwo - ale nie tłumaczy *kiedy* czego użyć, ani nie podaje reguły mnożenia, od której zaczyna się każde zliczanie. Tu też: średnia ważona i szybszy wzór na wariancję.

12.1 REGUŁY ZLICZANIA

Reguła mnożenia

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

- Gdy wybór składa się z *kolejnych etapów* („najpierw..., potem..., na końcu...”), liczby możliwości na każdym etapie *mnożysz*. To fundament - permutacje i wariacje z karty to tylko szczególne przypadki tej reguły.

PRZYKŁAD

Ile liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach? Setki: 9 możliwości (bez zera), dziesiątki: 9 (bez użytej cyfry, ale zero już wolno), jedności: 8. Razem $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Reguła dodawania

- Gdy scenariusze *wykluczają się* („albo..., albo...”), możliwości *dodajesz*. Mnożysz wzdłuż etapów, dodajesz między wariantami.

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n -elementowego

$$2^n$$

- Każdy element ma dwie opcje: jest w podzbiorze albo go nie ma - stąd $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$. Wliczamy zbiór pusty i cały zbiór.

12.2 KTÓRY WZÓR WYBRAĆ? TABELA DECYZYJNA

- Wzory na permutacje, wariacje i kombinacje są w karcie - ale karta nie mówi, kiedy którego użyć. Odpowiadasz na dwa pytania: czy kolejność wyboru ma znaczenie? czy elementy mogą się powtarzać?

Sytuacja	Kolejność?	Wzór
ustawiamy <i>wszystkie</i> elementy w rząd	tak	$P_n = n!$
wybieramy k z n , bez powtórzeń	tak	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
wybieramy k z n , z powtórzeniami	tak	n^k
wybieramy k z n (drużyna, delegacja)	nie	$\binom{n}{k}$

PRZYKŁAD

Trzycyfrowy kod PIN (cyfry mogą się powtarzać): kolejność ma znaczenie, powtórzenia dozwolone - $10^3 = 1000$. Trzyosobowa delegacja z klasy 20 osób: kolejność bez znaczenia - $\binom{20}{3} = 1140$.

12.3 PRAWDOPODOBIENSTWO - WŁASNOŚCI PRAKTYCZNE

Metoda drzewka

- Przy doświadczeniach wieloetapowych (losowanie bez zwracania, dwa rzuty) rysuj drzewko: prawdopodobieństwa *wzdłuż gałęzi mnożysz*, a wyniki *różnych gałęzi dodajesz*. Suma prawdopodobieństw na gałęziach wychodzących z jednego węzła musi dać 1 - to szybki test poprawności.

PRZYKŁAD

W urnie 3 kule białe i 2 czarne; losujemy dwie bez zwracania. $P(\text{obie białe}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ (druga gałąź: po wyjęciu białej zostały 2 białe z 4 kul).

Metoda zdarzenia przeciwnego

$$P(\text{co najmniej jeden}) = 1 - P(\text{żaden})$$

- Hasło „co najmniej jeden” = czerwona lampka: policz szansę, że *nie trafi się żaden*, i odejmij od jedynki. Wprost trzeba by rozpatrywać przypadki „dokładnie jeden, dokładnie dwa...” - dużo dłużej.

PRZYKŁAD

Rzucamy dwa razy kostką. $P(\text{co najmniej jedna szóstka}) = 1 - P(\text{brak szóstek}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Różnica zdarzeń

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

- „Zaszło A , ale nie B ”: od szansy na A odejmujesz część wspólną. Uwaga - *nie wolno* odjąć po prostu $P(B)$.

12.4 STATYSTYKA

Średnia ważona

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

- Każda wartość liczy się tyle razy, ile wynosi jej waga w_i (np. liczba uczniów z daną oceną). Dzielisz przez sumę wag, nie przez liczbę wartości.

PRZYKŁAD

Oceny: trzy piątki i dwie dwójki. $\bar{x} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{19}{5} = 3,8$.

Mediana

- Najpierw *uporządkuj* dane rosnąco! Mediana to wyraz środkowy, a przy parzystej liczbie danych - średnia dwóch środkowych. Bez sortowania wynik będzie błędny.

Wariancja - postać alternatywna

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

- „Średnia kwadratów minus kwadrat średniej”. Daje ten sam wynik co wzór z karty, ale bez liczenia różnic $x_i - \bar{x}$ - mniej rachunków, mniej błędów. Odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

PRZYKŁAD

Dane: 1, 2, 3, 6. Średnia $\bar{x} = 3$. Wariancja: $\frac{1+4+9+36}{4} - 9 = \frac{50}{4} - 9 = 3,5$.

Granice i pochodna

TEORIA I WZORY

Pochodna mierzy, jak szybko funkcja rośnie - geometrycznie: nachylenie stycznej. Karta CKE podaje pochodne sumy, iloczynu i ilorazu, ale *nie podaje* pochodnej funkcji złożonej - a bez niej nie policzysz nawet $[(2x + 1)^{10}]'$.

13.1 GRANICE FUNKCJI [R]

Granica ilorazu wielomianów w $\pm\infty$

- Jak przy ciągach: liczy się tylko najwyższa potęga. Stopień licznika mniejszy od mianownika $\Rightarrow$ granica 0; równy $\Rightarrow$ iloraz współczynników; większy $\Rightarrow \pm\infty$.

Symbole nieoznaczone (wymagają przekształcenia)

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty$$

- „Nieoznaczony” znaczy: wynik może wyjść dowolny - trzeba najpierw przekształcić wyrażenie (skrócić, wyłączyć potęgę), a dopiero potem przejść do granicy.

PRZYKŁAD

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ to typ $\frac{0}{0}$. Rozkładamy: $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 4$.

13.2 POCHODNA [R]

Pochodna funkcji złożonej

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Funkcja złożona to „funkcja w funkcji” (np. coś do dziesiątej potęgi). Przepis: pochodna zewnętrznej - z wnętrzem przepisany bez zmian - razy pochodna wnętrza. O tym „razy wnętrze” zapomina się najczęściej.

PRZYKŁAD

$$[(2x + 1)^{10}]' = 10(2x + 1)^9 \cdot \underbrace{2}_{\text{pochodna wnętrza}} = 20(2x + 1)^9.$$

Pochodna pierwiastka

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

- To wzór $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $n = \frac{1}{2}$, tylko zapisany wygodniej.

13.3 INTERPRETACJE POCHODNEJ [R]**Współczynnik kierunkowy stycznej**

$$a = f'(x_0)$$

- Wartość pochodnej w punkcie to nachylenie stycznej w tym punkcie. Chcesz stycznej równoległej do $y = 3x$? Szukasz x_0 , dla którego $f'(x_0) = 3$. Dwie krzywe są styczne, gdy w punkcie wspólnym mają też wspólną pochodną.

PRZYKŁAD

$f(x) = x^2$, punkt $x_0 = 1$. $f'(x) = 2x$, więc $a = f'(1) = 2$; styczna: $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

Warunek wystarczający ekstremum

- Samo $f'(x_0) = 0$ to za mało (kontrprzykład: $f(x) = x^3$ w zerze - pochodna zerowa, ekstremum brak). Pochodna musi w x_0 *zmieniać znak*: $z + na -$ to maksimum, $z - na +$ to minimum. Zawsze zbadaj znak pochodnej po obu stronach!

Schemat zadania optymalizacyjnego

- zapisz wielkość optymalizowaną jako funkcję *jednej* zmiennej (drugą wyznacz z warunku zadania),
- wyznacz dziedzinę wynikającą z geometrii/treści (np. długości muszą być dodatnie),
- policz pochodną, znajdź jej miejsca zerowe i zbadaj znak,
- sprawdź, czy ekstremum leży w dziedzinie, policz wartość i sformułuj odpowiedź.

PRZYKŁAD

Z drutu długości 20 zbuduj prostokąt o największym polu. Boki: x i $10 - x$, pole $P(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$ dla $x \in (0, 10)$. $P'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$; pochodna zmienia znak $z + na -$, więc maksimum. Największe pole: kwadrat 5×5 , $P = 25$.



Gotowy na maturę?

Umów się na lekcję - pierwsza próbna jest **gratis**.

LEKCJA PRÓBNA GRATIS

- **www** korepetycjesolve.com
- **e-mail** solve@korepetycjesolve.com



Zeskanuj i umów lekcję