Brak w karcie wzorów

## Reszta z dzielenia przez $(x-a)(x-b)$

$$r(x) = px + q, \qquad W(a) = pa + q, \qquad W(b) = pb + q$$

**Kiedy?** gdy dzielisz przez trójmian o dwóch pierwiastkach: reszta ma stopień co najwyżej 1.

**Przykład:** $W(1) = 3$, $W(-1) = 7$: $p + q = 3$ i $-p + q = 7$, więc $r(x) = -2x + 5$.

Brak w karcie wzorów

## Pierwiastki wymierne wielomianu

$$\frac{p}{q} \text{ (nieskracalny) pierwiastek } \Rightarrow \; p \mid a_0, \quad q \mid a_n$$

**Kiedy?** gdy szukasz pierwiastka do rozkładu wielomianu o współczynnikach całkowitych. Kandydaci to dzielniki wyrazu wolnego przez dzielniki współczynnika przy najwyższej potędze.

**Przykład:** $2x^3 + x^2 - 5x + 2$: kandydat $\frac{1}{2}$ i $W(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2 = 0$.

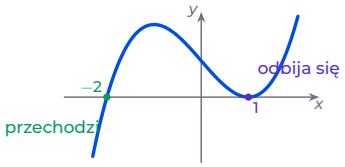
Brak w karcie wzorów

## Wężyk a krotność pierwiastka

$$(x - x_0)^k: \quad k \text{ nieparzyste} \Rightarrow \text{wykres przechodzi}, \quad k \text{ parzyste} \Rightarrow \text{odbija się}$$

**Kiedy?** w nierównościach wielomianowych, gdy czynnik jest w potędze. Przy krotności parzystej znak się nie zmienia.

**Przykład:** $(x-1)^2(x+2) \geqslant 0 \iff x \in \langle -2, +\infty)$, bo $x = 1$ też jest rozwiązaniem.




Brak w karcie wzorów

## Nierówność wymierna

$$\frac{V}{W} > 0 \iff V \cdot W > 0, \qquad \frac{V}{W} \geqslant 0 \iff V \cdot W \geqslant 0 \text{ i } W \neq 0$$

**Kiedy?** w każdej nierówności z niewiadomą w mianowniku. Nie mnożysz przez mianownik, bo nie znasz jego znaku.

**Przykład:** $\frac{x-3}{x+1} \geqslant 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup \langle 3, +\infty)$.

# R04 Funkcja kwadratowa z parametrem

6 wzorów

Do powtórki wróć do zbioru: Pewniaki R, Funkcja kwadratowa z parametrem

Brak w karcie wzorów

## Suma kwadratów pierwiastków

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

**Kiedy?** gdy warunek z treści zawiera kwadraty pierwiastków. Wzory na $S$ i $P$ (Viète'a) są w karcie, ta zamiana nie.

**Przykład:** $x^2 - 5x + 3 = 0$: $S = 5$, $P = 3$, więc $x_1^2 + x_2^2 = 25 - 6 = 19$.

Brak w karcie wzorów

## Odległość pierwiastków

$$(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P, \qquad |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

**Kiedy?** gdy warunek mówi o różnicy albo odległości pierwiastków.

**Przykład:** $x^2 - 6x + 5$: $\Delta = 16$, więc $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{16}}{1} = 4$.

# R09 Ciągi, granice i szereg

Do powtórki wróć do zbioru: Pewniaki R, Ciągi, granice i szereg

6 wzorów

Brak w karcie wzorów

## Granica ilorazu wielomianów

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + \ldots}{b_m n^m + \ldots} = \begin{cases} 0, & k < m \\ \frac{a_k}{b_m}, & k = m \\ \pm\infty, & k > m \end{cases}$$

**Kiedy?** gdy w liczniku i mianowniku są wielomiany od $n$: decydują najwyższe potęgi. Przy $k > m$ znak to znak $\frac{a_k}{b_m}$.

**Przykład:** $\lim \frac{3n^2+1}{2n^2-n} = \frac{3}{2}$.

Brak w karcie wzorów

## Granica z potęgami

dziel licznik i mianownik przez największą potęgę $b^n$

$$q^n \to 0 \quad \text{dla } |q| < 1$$

**Kiedy?** gdy w granicy są potęgi o różnych podstawach.

**Przykład:** $\lim \frac{2^n+3\cdot 5^n}{5^n-1} = \lim \frac{(2/5)^n+3}{1-(1/5)^n} = 3$.

Brak w karcie wzorów

## Różnica pierwiastków: sprzężenie

$$\sqrt{n^2+an} - n = \frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n} \to \frac{a}{2}$$

**Kiedy?** gdy granica ma postać $\infty - \infty$ z pierwiastkiem. Mnożysz i dzielisz przez sprzężenie.

**Przykład:** $\lim\left(\sqrt{n^2+3n} - n\right) = \frac{3}{2}$.

Brak w karcie wzorów

## Ułamek okresowy jako szereg

$$0,(ab) = \frac{0,ab}{1-0,01} = \frac{ab}{99}$$

**Kiedy?** gdy trzeba zamienić ułamek okresowy na zwykły (albo udowodnić, że jest wymierny).

**Przykład:** $0,(72) = \frac{0,72}{0,99} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$.

Brak w karcie wzorów

## Szereg z niewiadomą

suma istnieje $\iff |q| < 1 \iff -1 < q < 1 \Rightarrow$ dziedzina

**Kiedy?** gdy iloraz szeregu zależy od $x$: warunek $|q| < 1$ zamieniasz na nierówność. Wzór na sumę jest w karcie.

**Przykład:** $1 + (x-3) + (x-3)^2 + \ldots$: $|x-3| < 1$, więc $x \in (2,4)$, a suma to $\frac{1}{4-x}$.

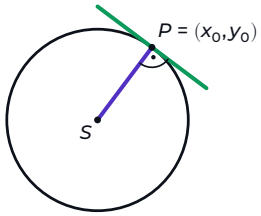
Brak w karcie wzorów

## Styczna do okręgu w punkcie

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$$

**Kiedy?** gdy punkt styczności $(x_0, y_0)$ leży na okręgu o środku $(a, b)$.

**Przykład:** $x^2 + y^2 = 25$ w punkcie $(3, 4)$: $3x + 4y = 25$.



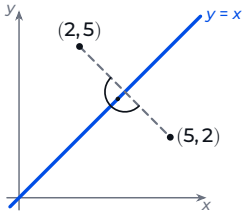

Brak w karcie wzorów

## Symetria względem prostej $y = x$ i punktu

$$y = x: \ (x,y) \mapsto (y,x) \qquad y = -x: \ (x,y) \mapsto (-y,-x) \qquad Q: \ P' = 2Q - P$$

**Kiedy?** gdy odbijasz punkty, proste albo okręgi.

**Przykład:** punkt $(2, 5)$: względem $y = x$ to $(5, 2)$, względem $Q = (1, 1)$ to $(0, -3)$.




# R13 Stereometria

Do powtórki wróć do zbioru: Pewniaki R, Stereometria R

5 wzorów

Brak w karcie wzorów

## Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi

$$\cos\varphi = \frac{2m^2 - d^2}{2m^2}$$

**Kiedy?** $m$ to wysokość ściany bocznej opuszczona na wspólną krawędź, $d$ to odcinek łączący spodki tych wysokości (w ostrosłupie czworokątnym przekątna podstawy).

**Przykład:** wszystkie krawędzie $a$: $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $d = a\sqrt{2}$, więc $2m^2 = \frac{3}{2}a^2$ i $\cos\varphi = \left(\frac{3}{2} - 2\right) : \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}$.

Brak w karcie wzorów

## Odległość punktu od płaszczyzny z objętości

$$d = \frac{3V}{P}$$

**Kiedy?** gdy wysokość ostrosłupa trudno wskazać wprost: liczysz objętość inaczej i dzielisz przez pole podstawy.

**Przykład:** sześcian $a = 1$, odległość $A$ od płaszczyzny $BDE$: $V_{ABDE} = \frac{1}{6}$, $P_{BDE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $d = 3 \cdot \frac{1}{6} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

