Różnica potęg o dowolnym wykładniku

jest w karcie wzorów

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$\Longrightarrow\ x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

drugi nawias ma n wyrazów, w których potęga a maleje, a b rośnie, a wszystkie znaki to plus. Dla sumy nieparzystych potęg wstawiasz $-b$ zamiast b, więc znaki są na przemian: $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$. Sprawdzasz mnożeniem: wyrazy pośrednie się skracają i zostaje $x^5 - 1$.

Policz w głowie

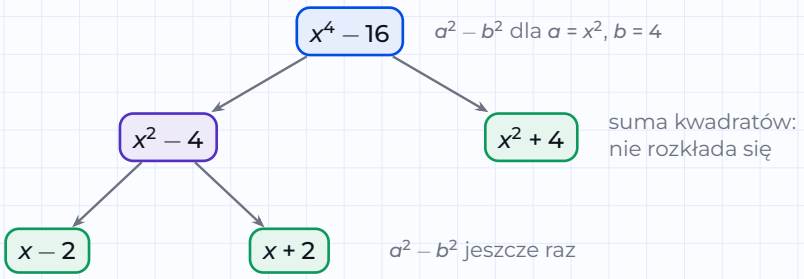
$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$	wspólny czynnik, potem różnica kwadratów
$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$	$27 = 3^3$, znak przy $3x$ to minus
$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$	współczynniki $1, 3, 3, 1$
$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$	różnica kwadratów dwa razy

Różnica potęg parzystych

jest w karcie wzorów

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

potęgę parzystą traktujesz jak kwadrat potęgi niższej ($x^4 = (x^2)^2$) i stosujesz różnicę kwadratów, a potem jeszcze raz. **Suma kwadratów** $a^2 + b^2$ nie rozkłada się na czynniki rzeczywiste. Podobnie $a^6 - b^6$ rozkładasz jako różnicę kwadratów albo różnicę sześcianów.



rozkładasz, dopóki się da: $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$, a czynnik $x^2 + 4$ już zostaje



Zadanie BO2. (0--3) POZIOM 3

wymaganie II.R5

9 min *Cel: dowód podzielności przez rozkład różnicy kwadratów i sześcianów*

Wykaż, że liczba $5^6 - 1$ jest podzielna przez 31 oraz przez 9.

ROZWIĄZANIE

Zadanie BO3. (0--4) POZIOM 3

wymaganie II.R2

11 min *Cel: rozkład $n^4 + 4$ przez dopełnienie do kwadratu, a potem oszacowanie obu czynników*

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ liczba $n^4 + 4$ jest liczbą złożoną.

ROZWIĄZANIE

Odpowiedź: liczba jest podzielna przez 31 i przez 9, co należało wykazać

Schemat oceniania *jak sprawdza egzaminator CKE*

1 pkt zapisanie $5^6 - 1 = (5^3 - 1)(5^3 + 1) = 124 \cdot 126$.

2 pkt rozkład $124 = 4 \cdot 31$ i wniosek o podzielności przez 31.

3 pkt rozkład $126 = 14 \cdot 9$ i wniosek o podzielności przez 9.

Obniża ocenę: sprawdzenie podzielności dzieleniem samej liczby 15624 bez rozkładu (jak w zadaniu „wykaż", trzeba pokazać rozumowanie).

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Reszty z dzielenia. Można też liczyć: $5^3 = 125 = 4 \cdot 31 + 1$, więc $5^3 - 1 = 124$ dzieli się przez 31. To ten sam czynnik, tylko zauważony bez wzoru.

Pułapka: w poleceniu „wykaż" podaj rozkład na czynniki: sam wynik 15624 i jego dzielenie przez 31 i 9 nie jest dowodem rozumowaniem.

Zadanie BO3. (0--4) POZIOM 3

wymaganie II.R2

Rozwiązanie wzorcowe *tak zapisujesz w arkuszu*

Co wiemy: wiem, że liczba złożona to liczba większa od 1, którą można zapisać jako iloczyn dwóch liczb całkowitych większych od 1. Muszę więc rozłożyć $n^4 + 4$ na dwa takie czynniki.

1. Wzór na różnicę kwadratów da się zastosować, jeśli dopiszę i odejmę $4n^2$, bo wtedy pierwsze trzy wyrazy tworzą kwadrat sumy: $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$.
2. Stosuję wzór $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$: $n^4 + 4 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.
3. Oceniam pierwszy czynnik: $n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1$. Dla całkowitego $n > 1$ mamy $n \geqslant 2$, więc $(n - 1)^2 \geqslant 1$ i czynnik jest co najmniej 2.
4. Drugi czynnik $n^2 + 2n + 2$ jest większy od pierwszego, bo różnica to $4n > 0$, więc też jest większy od 1. Liczba jest iloczynem dwóch liczb całkowitych większych od 1, czyli jest złożona.

Sprawdzenie: dla $n = 2$: $16 + 4 = 20 = 2 \cdot 10$, a $n^2 - 2n + 2 = 2$ i $n^2 + 2n + 2 = 10$ ✓

Odpowiedź: liczba $n^4 + 4$ jest złożona dla każdego całkowitego $n > 1$, co należało wykazać