$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} \xrightarrow{\substack{x<2,\ \text{więc } x-2\to 0^-\\ \text{i ułamek jest ujemny}}} -\infty$$

Policz w głowie

$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ — $x>2$, więc $x-2$ jest małe dodatnie

$\lim_{x\to 0^-}\frac{-3}{x}=+\infty$ — minus przez małe ujemne daje plus

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ — kwadrat jest zawsze dodatni, więc z obu stron to samo

$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty$ — licznik $\to 3>0$, mianownik $\to 0^+$

Brak w karcie wzorów

Różnica ułamków, czyli $\infty-\infty$

$$\frac{A}{x-a}-\frac{B}{(x-a)(x+b)}=\frac{A(x+b)-B}{(x-a)(x+b)}$$

gdy podstawienie daje dwa ułamki, które „uciekają” do $\pm\infty$ jednocześnie, **nie wolno** liczyć ich osobno. Sprowadzam do wspólnego mianownika (najpierw rozkładam mianowniki), zapisuję jeden ułamek, skracam czynnik $(x-a)$ i dopiero wtedy podstawiam.

Brak w karcie wzorów

Krok 4: granica w nieskończoności

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+\dots}{b_mx^m+\dots}=\begin{cases}0, & n<m\\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m\\ \pm\infty, & n>m\end{cases}$$

liczą się tylko **najwyższe potęgi**. Dzielisz licznik i mianownik przez najwyższą potęgę x z **mianownika**, a składniki typu $\frac{1}{x}$, $\frac{5}{x^2}$ dążą wtedy do zera. Gdy stopień licznika jest większy, wynik to nieskończoność, a jej znak ustalasz ze znaków składników i z tego, czy x jest dodatnie, czy ujemne.

$$\frac{3x^2-x}{x^2+5} \xrightarrow{\text{dzielę licznik i mianownik przez } x^2} \frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x^2}}\to 3$$

Zadanie A9. (0--1) START

wymaganie XIII.R1

4 min *Cel: najpierw skróć, potem sprawdź znak mianownika po lewej stronie punktu*

Granica $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x^2-1}$ jest równa

Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 0 **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

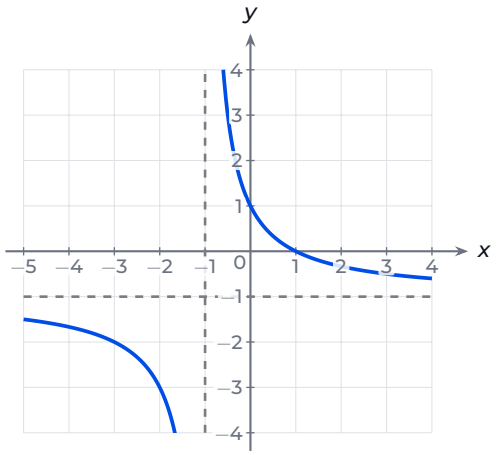
ROZWIĄZANIE

Zadanie A10. (0--4) START

wymaganie XIII.R1

8 min *Cel: asymptoty i granice odczytujesz z wykresu, bez rachunków*

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej dla $x \neq -1$. Proste przerywane to asymptoty tego wykresu.



a) Podaj równania obu asymptot wykresu funkcji f.

b) Odczytaj $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

c) Odczytaj $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

d) Podaj miejsce zerowe funkcji f.

ROZWIĄZANIE

5 **e)** Mianownik jest zerem dla $x = 0$, a $\frac{1}{x^2} \to +\infty$, więc asymptota pionowa $x = 0$. W $\pm\infty$ granica to 0, więc asymptota pozioma $y = 0$.

6 **f)** Po rozkładzie $\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x + 4$ dla $x \neq 4$. Granica w 4 to 8, czyli liczba, więc to tylko dziura: **brak asymptoty pionowej**. W $\pm\infty$ wyrażenie $x + 4$ dąży do $\pm\infty$, więc **brak asymptoty poziomej**.

Sprawdzenie: w d) dla $x = 100$ ułamek to $\frac{10\,000}{9991} \approx 1{,}001$, czyli blisko 1 ✓

Odpowiedź: a) $x = -3$, $y = 0$; **b)** $x = 4$, $y = 2$; **c) tylko** $y = 0$; **d)** $x = -3$, $x = 3$, $y = 1$; **e)** $x = 0$, $y = 0$; **f) brak obu**

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Szybka ściąga. Zero mianownika bez zera w liczniku daje asymptotę pionową. Stopień licznika mniejszy od stopnia mianownika daje $y = 0$, równe stopnie dają iloraz współczynników, a większy stopień licznika nie daje asymptoty poziomej.

Pułapka: w f) funkcja nie jest określona w 4, ale to tylko dziura, bo granica w 4 jest liczbą; asymptoty pionowej nie ma.

Zadanie A9. (0--1) START

wymaganie XIII.R1

Rozwiązanie wzorcowe *tak zapisujesz w arkuszu*

1 Podstawienie $x = 1$ daje $\frac{2}{0}$, ale najpierw skracam: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, więc $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$ dla $x \neq \pm 1$.

2 Gdy $x \to 1^-$, to $x < 1$, więc $x - 1 \to 0^-$. Zatem $\frac{1}{x-1} \to \frac{1}{0^-} = -\infty$. To odpowiedź C.

Brak w karcie wzorów

Sprawdzenie: dla $x = 0{,}99$ ułamek to $\frac{1}{-0{,}01} = -100$ ✓

Skąd się biorą złe odpowiedzi

A. $\frac{1}{2}$ to granica $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$ w punkcie 1: ktoś pomylił licznik $x + 1$ z $x - 1$.

B. 0 powstaje, gdy podstawimy do licznika $x = -1$ (wtedy $x + 1 = 0$) zamiast $x = 1$.

D. $+\infty$ ma dobrą wielkość, ale zły znak: pominięto, że przy $x \to 1^-$ mianownik $x - 1$ jest ujemny.

Odpowiedź: C

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Liczba testowa. Wstaw do wyrażenia $x = 0{,}99$: licznik to 1,99, a mianownik $0{,}9801 - 1 = -0{,}0199$. Iloraz jest duży i ujemny, więc odpowiedzi $\frac{1}{2}$, 0 i $+\infty$ odpadają.

Pułapka: przy granicy z lewej strony mianownik $x - 1$ jest ujemny, więc wynik jest $-\infty$, a nie $+\infty$.