Policz w głowie

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ — szukam boku c naprzeciw kąta γ

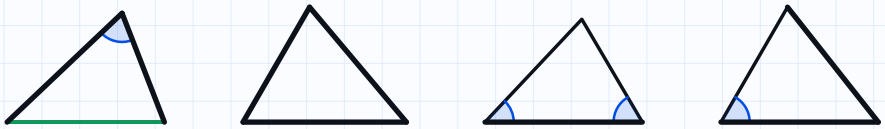
$\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ — to samo, rozwiązane względem cosinusa: kąt z trzech boków

Brak w karcie wzorów

Który kąt albo bok wybrać: sinusy czy cosinusy

para „bok i kąt naprzeciw” $\Rightarrow$ sin; kąt zawarty albo trzy boki $\Rightarrow$ cos

popatrz, co **dane** i czego **szukasz**. Gdy znasz bok i kąt *naprzeciw* niego, a szukasz bok albo kąt w drugiej parze, używasz **sinusów**. Gdy masz **dwa boki i kąt między nimi** albo **trzy boki**, używasz **cosinusów**. Gdy znasz dwa kąty, trzeci to 180° minus ich suma.



a, b, γ **cos** | a, b, c **cos** | α, β, c **sin** | a, c, α **sin**

pogrubione elementy są dane: dwa boki i kąt między nimi, trzy boki (cosinusy), dwa kąty i bok albo bok z kątem naprzeciw (sinusy)

Policz w głowie

$a,\ b,\ \gamma \Rightarrow c$ — cosinusów, szukany bok jest naprzeciw danego kąta

$a,\ b,\ c \Rightarrow \cos\gamma$ — cosinusów, a potem kąt z cosinusa

$\alpha,\ \beta,\ a \Rightarrow b$ — sinusów: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$, potem proporcja

Cosinus kąta rozwartego

jest w karcie wzorów

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

z wzoru $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ znak cosinusa podpowiada rodzaj kąta: gdy $c^2 < a^2 + b^2$, kąt jest **ostry**, gdy $c^2 = a^2 + b^2$, jest **prosty**, a gdy $c^2 > a^2 + b^2$, jest **rozwarty** i cosinus jest ujemny. Dla kątów szczególnych: $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie B5. (0--6) START

wymaganie VII.3

6 min *Cel: cosinus kąta rozwartego jest ujemny, bo* $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

Oblicz albo podaj.

a) $\cos 120^\circ$

b) $\cos 135^\circ$

c) $\cos 150^\circ$

d) kąt rozwarty α, dla którego $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) kąt $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$, dla którego $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

f) $\cos(180^\circ - \alpha)$, gdy $\cos\alpha = \frac{2}{5}$

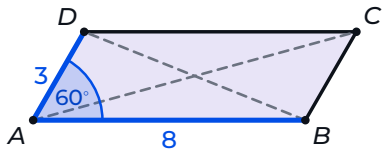
ROZWIĄZANIE

Zadanie B6. (0--2) START

wymaganie VII.3

5 min *Cel: przekątne równoległoboku to cosinusy kątów* α *i* $180^\circ - \alpha$

Boki równoległoboku $ABCD$ mają długości $|AB| = 8$ i $|AD| = 3$, a kąt BAD ma miarę 60° (rysunek w skali).



a) Oblicz długość krótszej przekątnej.

b) Oblicz długość dłuższej przekątnej.

ROZWIĄZANIE

Sprawdzenie: sprawdzam b): $3\sqrt{6} \approx 7{,}35 > 6$, bo kąt 60° jest większy od 45°, a naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok ✓

Odpowiedź: a) cosinusów, $\sqrt{39}$; b) sinusów, $3\sqrt{6}$; c) cosinusów, $\frac{3}{4}$; d) sinusów, $\frac{4}{5}$

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Test jednego zdania. Czy znam bok *i* kąt leżący naprzeciw niego? Jeśli tak (b, d), liczę sinusami. Jeśli nie (a, c), potrzebuję cosinusów.

Pułapka: w d) wychodzi $\sin\beta = \frac{4}{5}$, więc kąt β może być ostry albo rozwarty. O tym rozstrzyga reszta zadania.

Zadanie B5. (0--6) START

wymaganie VII.3

Rozwiązanie wzorcowe *tak zapisujesz w arkuszu*

Plan: Kąt rozwarty zamieniam na ostry wzorem $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. *jest w karcie wzorów*

1. **a)** Kąt 120° jest rozwarty, więc zamieniam go na ostry i dopisuję minus: $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.
2. **b)** Podobnie $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. **c)** Podobnie $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. **d)** Szukam kąta rozwartego o cosinusie $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Cosinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ma kąt ostry 30°, więc kąt rozwarty to $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.
5. **e)** Cosinus $\frac{1}{2}$ ma kąt ostry 60°, więc cosinus $-\frac{1}{2}$ ma kąt $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
6. **f)** Ze wzoru $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ dla $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ dostaję $\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{2}{5}$.

Sprawdzenie: sprawdzam d) i e): szukany kąt jest rozwarty, a jego cosinus ujemny ✓

Odpowiedź: a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 150°; e) 120°; f) $-\frac{2}{5}$

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Jak przy sinusach. Wartość dla kąta rozwartego bierz z tabeli kąta ostrego, a przy cosinusie dopisz znak minus. Przy sinusie żadnego minusa nie ma.

Pułapka: $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ jest dodatni, ale $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ jest ujemny: nie mieszaj obu reguł.