Policz w głowie

$\alpha = 45^\circ \Rightarrow a = 1$	$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, więc prosta $y = x + b$
$a = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$	$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$
$a = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$	ostry kąt o tangensie $\lvert -1 \rvert = 1$ to 45°, a rozwarty to $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
$\alpha = 150^\circ \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ i $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a kąt rozwarty daje znak minus

Brak w karcie wzorów

Kąt między prostymi

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2}\right|, \qquad 1 + a_1 a_2 \neq 0$$

jeśli proste mają kąty nachylenia α_1 i α_2, to kąt między nimi to $|\alpha_2 - \alpha_1|$ (albo jego dopełnienie do 180°). Ze wzoru na tangens różnicy kątów $\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$ dostajesz od razu wzór na $\operatorname{tg}\varphi$ przez same współczynniki a_1 i a_2. Wartość bezwzględna daje kąt **ostry**. Gdy $1 + a_1 a_2 = 0$, czyli $a_1 a_2 = -1$, mianownik jest zerem: to dokładnie przypadek prostych prostopadłych ($\varphi = 90^\circ$). Wzoru nie stosujesz do prostej pionowej, która nie ma współczynnika kierunkowego. Wtedy rysujesz kąt albo liczysz z kąta nachylenia drugiej prostej.

Policz w głowie

$y = x,\ y = \sqrt{3}x - 2 \Rightarrow \varphi = 15^\circ$	kąty nachylenia to 45° i 60°, więc kąt między prostymi jest równy $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$
$y = 2x + 1,\ y = 3x - 5 \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{7}$	$\lvert \frac{3-2}{1+2\cdot 3} \rvert = \frac{1}{7}$
$y = 2x,\ y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \varphi = 90^\circ$	$1 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0$, więc proste są prostopadłe

Brak w karcie wzorów

Wektor prostopadły do prostej

$$k\colon Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad [A, B] \perp k$$

prosta $Ax + By + C = 0$ (dla $B \neq 0$) ma współczynnik kierunkowy $a = -\frac{A}{B}$. Wektor $[A, B]$ ma „nachylenie” $\frac{B}{A}$, a iloczyn $-\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A} = -1$. To znaczy, że wektor złożony ze współczynników przy x i y jest prostopadły do prostej. Dlatego prostopadła do $3x + 4y - 10 = 0$ przez punkt P ma kierunek $[3, 4]$, czyli współczynnik $\frac{4}{3}$. Ten fakt wynika z warunku $a_1 a_2 = -1$, więc nie wymaga nowego wzoru.

Zadanie A3. (0--6) START

wymaganie IX.R4

9 min *Cel: nowy współczynnik wstawiasz do wzoru na prostą przez punkt*

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt P.

a) $k\colon y = 2x + 1,\ P = (4,3)$

b) $k\colon y = -3x + 2,\ P = (6,1)$

c) $k\colon y = \frac{1}{2}x - 4,\ P = (-1,2)$

d) $k\colon y = -x + 3,\ P = (2,-5)$

e) $k\colon y = \frac{2}{3}x,\ P = (-2,-1)$

f) $k\colon y = -\frac{4}{5}x + 1,\ P = (0,3)$

ROZWIĄZANIE

Zadanie A4. (0--4) START

wymaganie IX.R4

7 min *Cel: kąt prosty w trójkącie sprawdzasz iloczynem współczynników, a pole liczysz z przyprostokątnych*

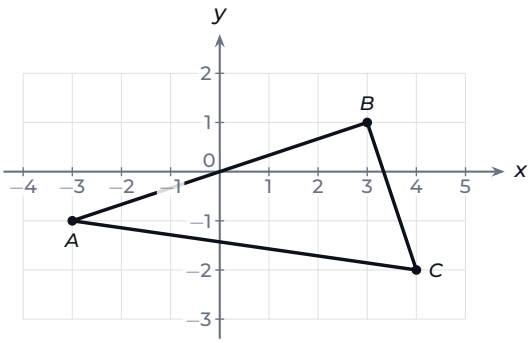
Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-3,-1)$, $B = (3,1)$ oraz $C = (4,-2)$ (zobacz rysunek).

a) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej AB.

b) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej BC.

c) Wykaż, że kąt ABC jest prosty.

d) Oblicz pole trójkąta ABC.



ROZWIĄZANIE

Odpowiedź: a) $y = -\frac{1}{2}x + 5$; **b)** $y = \frac{1}{3}x - 1$; **c)** $y = -2x$; **d)** $y = x - 7$; **e)** $y = -\frac{3}{2}x - 4$; **f)** $y = \frac{5}{4}x + 3$

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Wyraz wolny z punktu. Gdy masz już a_l, zapisz $y = a_l x + b$ i wstaw współrzędne punktu P. Na przykład w b) jest $1 = \frac{1}{3} \cdot 6 + b$, czyli $b = -1$. To ten sam wynik bez nawiasu w pierwszym wzorze.

Pułapka: wyraz wolny prostej k w ogóle nie wchodzi do rachunku: prostopadłość zależy tylko od współczynnika kierunkowego.

Zadanie A4. (0--4) START

wymaganie IX.R4

Rozwiązanie wzorcowe *tak zapisujesz w arkuszu*

Co wiemy: trójkąt ma wierzchołki $A = (-3,-1)$, $B = (3,1)$ i $C = (4,-2)$. Kąt przy wierzchołku B jest prosty, gdy prosta AB jest prostopadła do prostej BC, czyli gdy iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi -1.

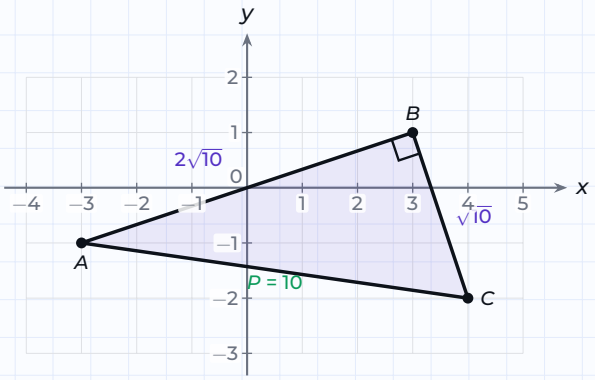
1. **a)** Wypisuję dane: $A = (-3,-1)$ i $B = (3,1)$. Liczę $a_{AB} = \frac{1-(-1)}{3-(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, odejmując w obu miejscach w tej samej kolejności.

2. **b)** Dla $B = (3,1)$ i $C = (4,-2)$ liczę tak samo: $a_{BC} = \frac{-2-1}{4-3} = \frac{-3}{1} = -3$.

3. **c)** Kąt ABC jest prosty, gdy proste AB i BC są prostopadłe. Sprawdzam iloczyn współczynników: $a_{AB} \cdot a_{BC} = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$. Skoro iloczyn jest równy -1, proste są prostopadłe. Przecinają się w punkcie B, więc kąt ABC jest prosty. *jest w karcie wzorów*

4. **d)** Skoro kąt przy B jest prosty, boki AB i BC są przyprostokątnymi. Liczę ich długości: $|AB| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ oraz $|BC| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$. Pole to $P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 = 10$.

kąt przy B jest prosty, a przyprostokątne mają $2\sqrt{10}$ i $\sqrt{10}$



Sprawdzenie: prostokąt opisany na trójkącie ma $7 \times 3 = 21$, a trzy trójkąty dookoła mają $3{,}5 + 6 + 1{,}5 = 11$, więc pole to $21 - 11 = 10$ ✓

Odpowiedź: a) $\frac{1}{3}$; **b)** -3; **c) iloczyn jest równy -1, więc kąt jest prosty;** **d)** 10