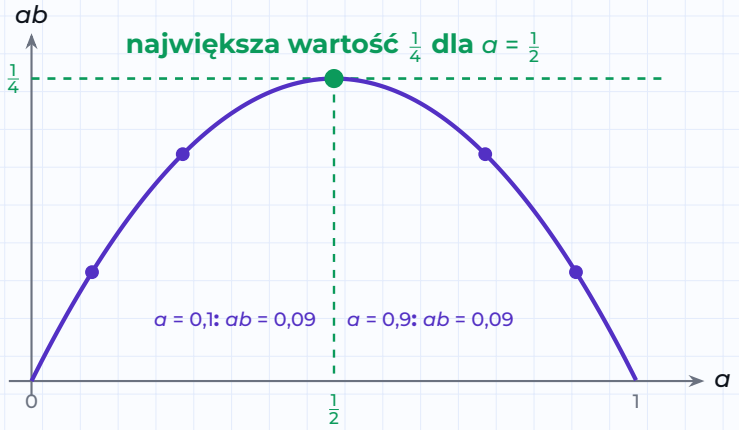


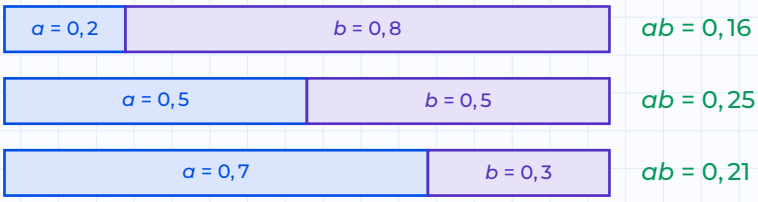
dla $a + b = 1$ iloczyn $ab = a(1 - a)$ to parabola skierowana ramionami w dół: nigdy nie przekracza $\frac{1}{4}$, a wartość $\frac{1}{4}$ osiąga dokładnie dla $a = b = \frac{1}{2}$

Brak w karcie wzorów

Najważniejsza nierówność z założeniem

$$a, b > 0, \quad a + b = 1 \implies ab \leqslant \frac{1}{4}, \qquad \text{równość tylko dla } a = b = \frac{1}{2}$$

to pomocniczy fakt, który wraca w wielu zadaniach: gdy dwie liczby mają stałą sumę, ich iloczyn jest największy, gdy liczby są równe. Dowód to jedno przekształcenie z wzoru powyżej. Nierówność $ab \leqslant \frac{1}{4}$ możesz potem **wykorzystać** w dłuższym dowodzie.



odcinek o długości 1 rozcięty na dwie części a i b: im bliżej połowy, tym większy iloczyn ab

Policz w głowie

$a + b = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2a^2 - 2a + 1$	$a^2 + (1 - a)^2$
$a + b = 1 \Rightarrow (a + 1)(b + 1) = ab + 2$	$ab + a + b + 1$, a $a + b = 1$
$a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - a$	wyznaczam jedną zmienną
$x + y = 6 \Rightarrow xy = x(6 - x)$	wielomian drugiego stopnia

Pierwsza lekcja z korepetytorem jest za darmo

Wolisz przejść ten temat z kimś? Zeskanuj kod i umów darmową lekcję próbną online w Solve.

Zadanie B7. (0--1) START

wymaganie II.1

3 min *Cel: format P/F, każde zdanie sprawdź osobno*

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

Jeżeli $a > 0$, $b > 0$ i $a + b = 1$, to $ab \leqslant \frac{1}{4}$. P ☐ F ☐

Jeżeli $a + b = 1$, to $a^2 + b^2 = 1$. P ☐ F ☐

Dla $x > 0$ nierówność $x + \frac{9}{x} \geqslant 6$ jest równoważna nierówności $x^2 + 9 \geqslant 6x$. P ☐ F ☐

ROZWIĄZANIE

Zadanie B8. (0--1) START

wymaganie II.1

3 min *Cel: podstawienie $b = 1 - a$ do iloczynu i uważne rozwinięcie*

Liczby a i b spełniają równanie $a + b = 1$. Iloczyn ab jest równy

Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $a - a^2$ **B.** $a^2 - a$ **C.** $1 - a^2$ **D.** $1 + a$

ROZWIĄZANIE

Zadanie B9. (0--1) START

wymaganie II.1

3 min *Cel: nierówność równoważna po pomnożeniu przez dodatnie x, czyli mnożysz każdy składnik*

Liczba x jest dodatnia. Nierówność $x + \frac{4}{x} \geqslant 4$ jest równoważna nierówności

Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $x^2 + 4 \leqslant 4x$ **B.** $x^2 + 4 \geqslant 4x$ **C.** $x + 4 \geqslant 4x$ **D.** $x^2 + 4x \geqslant 4$

ROZWIĄZANIE

Zadanie B7. (0--1) START

wymaganie II.1

Rozwiązanie wzorcowe *tak zapisujesz w arkuszu*

Plan: Każde zdanie sprawdzam osobno.

Brak w karcie wzorów

1. Pierwsze zdanie: z $a + b = 1$ mam $b = 1 - a$, więc $ab = a - a^2$. Nierówność $a - a^2 \leqslant \frac{1}{4}$ jest równoważna $a^2 - a + \frac{1}{4} \geqslant 0$, czyli $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. To prawda, więc zdanie jest prawdziwe: **P**.
2. Drugie zdanie: ze wzoru $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 - 2ab$ widać, że wynik zależy od ab. Szukam kontrprzykładu: dla $a = b = \frac{1}{2}$ mam $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 1$. Zdanie jest fałszywe: **F**.
3. Trzecie zdanie: mnożę obie strony przez $x > 0$, więc znak się nie zmienia: $x \cdot x + \frac{9}{x} \cdot x \geqslant 6 \cdot x$, czyli $x^2 + 9 \geqslant 6x$. Zdanie jest prawdziwe: **P**.

Odpowiedź: P, F, P (1 pkt tylko za wszystkie trzy poprawne oceny)

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Liczby. W drugim zdaniu wystarczy $a = b = \frac{1}{2}$. W pierwszym wypróbuj $a = 0{,}3$, $b = 0{,}7$: $0{,}21 \leqslant 0{,}25$. *tylko do zadań zamkniętych* To sprawdziany, nie dowody.

Pułapka: w drugim zdaniu $(a + b)^2 = 1$, ale $a^2 + b^2 \neq 1$: brakuje $-2ab$.

Zadanie B8. (0--1) START

wymaganie II.1

Rozwiązanie wzorcowe *tak zapisujesz w arkuszu*

Plan: Z równania $a + b = 1$ wyznaczam $b = 1 - a$ i podstawiam do ab.

Brak w karcie wzorów

1. Z równania odejmuję a i mam $b = 1 - a$. Wstawiam do iloczynu i mnożę przez nawias: $ab = a(1 - a) = a - a^2$. To odpowiedź A.

Sprawdzenie: sprawdzam liczbami: dla $a = \frac{1}{4}$ i $b = \frac{3}{4}$ mam $ab = \frac{3}{16}$ oraz $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{4}{16} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ ✓

Skąd się biorą złe odpowiedzi

B. $a^2 - a$ to wynik ze zmienionym znakiem: ktoś zapisał $a \cdot (a - 1)$, jakby $b = a - 1$.

C. $1 - a^2$ powstaje z mnożenia $(1 - a)(1 + a)$, czyli użycia $b = 1 + a$ zamiast $1 - a$.

D. $1 + a$ to suma 1 i a: ktoś pomylił mnożenie z dodawaniem.

Odpowiedź: A

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Podstawienie liczby. Wstaw $a = \frac{1}{2}$ (więc $b = \frac{1}{2}$): iloczyn to $\frac{1}{4}$. Odpowiedź A daje $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, a B daje $-\frac{1}{4}$. *tylko do zadań zamkniętych* W zadaniu otwartym zapisz podstawienie.