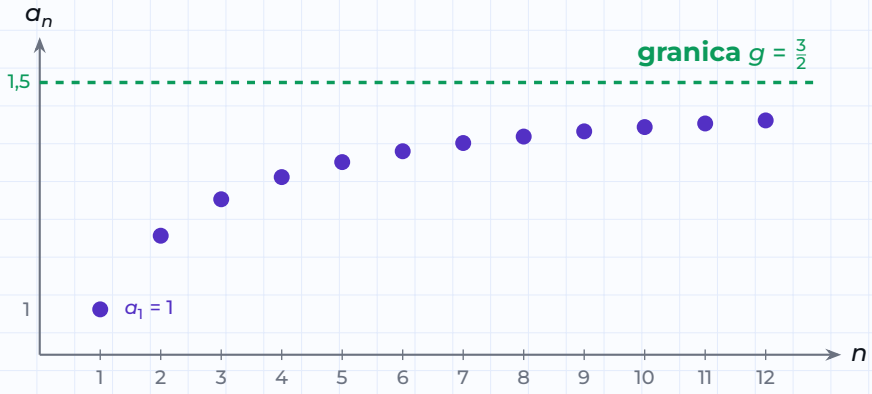
n	$\sqrt{n^2+3n}$	n	RÓŻNICA
10	11,4018	10	1,4018
100	101,4889	100	1,4889
1000	1001,4989	1000	1,4989
10000	10001,4999	10000	1,4999

oba składniki rosną bez końca, ale ich różnica nie rośnie i nie jest zerem: zbliża się do 1,5



wyrazy $a_n = \sqrt{n^2+3n} - n$ rosną coraz wolniej i zbliżają się do $\frac{3}{2}$ od dołu

Brak w karcie wzorów

Pierwiastek w ułamku: dziel przez n

$$\frac{\sqrt{4n^2+1}}{3n+2} = \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}} \to \frac{\sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3}$$

liczba n wchodzi do pierwiastka jako n^2, bo $\sqrt{n^2} = n$ dla $n > 0$. Dlatego licznik i mianownik dzielisz przez n, a pod pierwiastkiem odpowiednio przez n^2. Składniki $\frac{1}{n^2}$ i $\frac{2}{n}$ znikają i zostaje zwykły ułamek z liczb.

Policz w głowie

$\sqrt{n^2+5} \approx n$ — dla dużego n piątka nie ma znaczenia

$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \to 1$ — $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \to 1$

$\frac{\sqrt{9n^2-n}}{2n} \to \frac{3}{2}$ — $\frac{\sqrt{9}}{2}$

$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$ — $\sqrt{n}$ rośnie wolniej niż n

Zadanie B5. (0--4) START

wymaganie VI.R1

9 min *Cel: ciąg dany sumą, czyli najpierw wzór na sumę, potem granica*

Oblicz granicę ciągu o podanym wyrazie ogólnym.

a) $\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2+n}$

b) $\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2}$

c) $\dfrac{1+2+4+\cdots+2^{n-1}}{2^n}$

d) $\dfrac{1+3+9+\cdots+3^{n-1}}{3^n}$

ROZWIĄZANIE

Zadanie B6. (0--1) START

wymaganie VI.R1

4 min *Cel: format P/F, każde zdanie sprawdź osobno*

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

Granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$ jest równa 2. P ☐ F ☐

Granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9}-n\right)$ jest równa 3. P ☐ F ☐

Granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\binom{n}{2}}{n^2}$ jest równa $\dfrac{1}{2}$. P ☐ F ☐

ROZWIĄZANIE

Zadanie B7. (0--1) START

wymaganie VI.R1

3 min *Cel: $\infty-\infty$ nie jest zerem, mnożysz przez sprzężenie*

Granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+10n}-n\right)$ jest równa

Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 0 **B.** 5 **C.** 10 **D.** $+\infty$

ROZWIĄZANIE

Odpowiedź: a) $\frac{1}{4}$; b) 1; c) 1; d) $\frac{1}{2}$

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Pierwsze sumy. Wypisz sumy dla $n = 1, 2, 3$: w b) są $1, 4, 9$, czyli kwadraty, więc suma to n^2. W c) są $1, 3, 7$, czyli $2^n - 1$. Dopiero potem wpisz wzór do ułamka.

Pułapka: nie liczysz granicy każdego składnika sumy osobno: składników przybywa razem z n, więc najpierw zwijasz sumę.

Zadanie B6. (0--1) START

wymaganie VI.R1

Rozwiązanie wzorcowe *tak zapisujesz w arkuszu*

Plan: Każde zdanie sprawdzam osobno: pierwsze i drugie przez sprzężenie, trzecie przez rozpisanie symbolu Newtona.

Brak w karcie wzorów

1. Pierwsze zdanie: to różnica $\infty - \infty$, więc mnożę przez sprzężenie: $\sqrt{n^2+4n} - n = \frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1} \to \frac{4}{2} = 2$. Zdanie jest prawdziwe: **P**.

2. Drugie zdanie: $\sqrt{n^2+9} - n = \frac{9}{\sqrt{n^2+9}+n}$, a mianownik rośnie do $+\infty$, więc granica to 0, a nie 3. Zdanie jest fałszywe: **F**.

3. Trzecie zdanie: rozpisuję symbol Newtona na wielomian, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, więc $\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$. Zdanie jest prawdziwe: **P**.

Odpowiedź: P, F, P (1 pkt tylko za wszystkie trzy poprawne oceny)

Sposób ucznia *triki z korepetycji*

Wzór $\frac{b}{2}$ i stała. W pierwszym zdaniu $b = 4$, więc granica to $\frac{4}{2} = 2$. W drugim dodajesz do n^2 tylko stałą 9, a nie człon z n, więc różnica znika. *tylko do zadań zamkniętych*To tylko kontrola wyniku.

Pułapka: w drugim zdaniu pod pierwiastkiem jest $n^2 + 9$, a nie $n^2 + 9n$: bez członu z n licznik po sprzężeniu to stała 9, więc granica to 0.